Gebrochenrationale Funktionen (Einführung) **Ac**

Eine gebrochenrationale Funktion R ist von der Form $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, wobei

P(x) und Q(x) ganzrationale Funktionen n-ten Grades sind .

Im Allgemeinen hat eine gebrochenrationale Funktion Nullstellen im Nenner, was auf (hebbare) Lücken oder Pole hindeutet. Außerdem können Asymptoten, Extrempunkte, Wendepunkte und Nullstellen auftreten.

<u>Polgeraden</u> sind parallel zur y-Achse verlaufende Geraden, denen der Graph der betrachteten Funktion (für $y \to \infty$ bzw. $y \to -\infty$) beliebig nahe kommt, ohne sie jemals zu schneiden. Die zu den Polgeraden gehörenden x-Werte heißen Pole bzw. Polstellen .

<u>Asymptoten</u> (griechisch; „Nicht Übereinstimmende“) sind Geraden, denen der Graph der betrachteten Funktion (für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ bzw. $y \to \infty$ bzw. $y \to -\infty$) beliebig nahe kommt, ohne sie jemals zu schneiden. Polgeraden sind demnach spezielle Asymptoten. Da diese separat untersucht werden betrachtet man Asymptoten in der Regel nur in x-Richtung. Es gibt Fälle, in denen der Graph sich nicht einer Geraden nähert, sondern einer beliebigen Näherungsfunktion, z.B. einer ganzrationalen Funktion. Oft werden in der Literatur auch solche nichtlinearen Näherungsfunktionen als Asymptoten bezeichnet.

Bei gebrochenrationalen Funktionen werden die **Ableitungen** mit der **<u>Quotientenregel</u>** gebildet:

$$\boxed{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

Zur Bestimmung von **Asymptoten** ($x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$) ist in der Regel eine Polynomdivision erforderlich. In vielen Fällen kann man ersatzweise eine geschickte Umformung des Bruchterms derart vornehmen, dass der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der Grad des Nennerpolynoms wird. So lassen sich die Grenzwerte für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ leichter bilden .

Beispiel: $\dfrac{2x^3 - 4x + 8}{x^3 + 4} = \dfrac{2(x^3 - 2x + 4)}{x^3 + 4} = 2\dfrac{x^3 - 2x + 4}{x^3 + 4} = 2\dfrac{x^3 + 4 - 2x}{x^3 + 4} = 2 \cdot (1 - \dfrac{2x}{x^3 + 4})$

Hier sieht man, dass der Klammerterm gegen 1 strebt (für betragsgroße x), weil der Bruchterm in der Klammer gegen 0 strebt .

Die Asymptote hat demnach die Gleichung $y = 2$.

Im folgenden untersuchen wir einige <u>Beispiele:</u>

Beispiel 1: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - 8}$

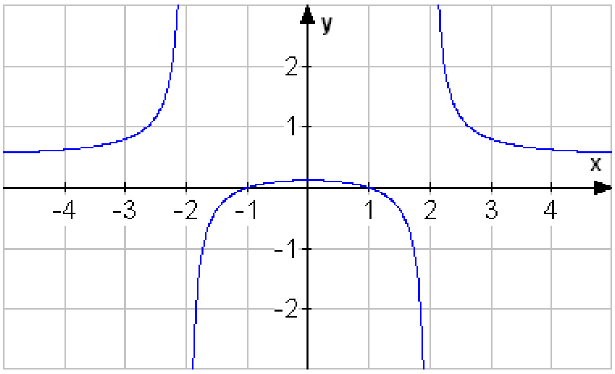
Zerlegt man die Terme, so erkennt man bereits Polstellen und Nullstellen:

$f(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{2(x+2)(x-2)}$ Nullstellen: x=1 sowie x=-1 Polstellen: x=2 sowie x=-2

f ist also an den Stellen 2 und -2 nicht definiert, daher ist der Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$

Dieses Beispiel ist problemlos, weil die Nullstellen des Nenners <u>nicht</u> mit den Nullstellen des Zählers übereinstimmen. Andernfalls müsste man auf (hebbare) Lücken prüfen (s. weiter unten).

Der Graph sieht so aus:



Die Polgeraden sind hier <u>nicht</u> eingezeichnet !

Ableitungen: $f'(x) = \dfrac{2x \cdot (2x^2 - 8) - (x^2 - 1) \cdot 4x}{(2x^2 - 8)^2} = \dfrac{4x^3 - 16x - 4x^3 + 4x}{(2x^2 - 8)^2}$

Vereinfacht ergibt sich: $f'(x) = \dfrac{-12x}{(2x^2 - 8)^2}$. Noch einfacher: $f'(x) = \dfrac{-3x}{(x^2 - 4)^2}$

Ebenso erhält man für die 2.Ableitung: $f''(x) = \dfrac{3 \cdot (3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$

Bestimmung der **Extrempunkte**:
Das notwendige Kriterium $f'(x) = 0$ liefert x=0. $f''(0) = \dfrac{12}{(-4)^3} < 0 \quad \Rightarrow$ <u>HP(0 / 0,125)</u> .

Wendepunkte existieren nicht, weil $f''(x) = 0$ keine Lösung liefert !

Asymptoten: Wir betrachten $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - 8}$ sowie $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - 8}$

Dazu formen wir den Funktionsterm zunächst um:

$$\frac{x^2 - 1}{2x^2 - 8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 4 + 3}{x^2 - 4} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{3}{x^2 - 4}\right)$$

Lassen wir nun $x \to \pm\infty$ streben, so strebt der Bruchterm $\dfrac{3}{x^2 - 4}$ gegen 0 und somit der gesamte Funktionsterm gegen 0,5 .

Die Asymptote hat also die Gleichung <u>$y = 0,5$</u> .

Betrachtet man den Funktionsgraphen, so kann man das Ergebnis auch bestätigen.

Beispiel 2: $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x - 12}{3x + 6}$

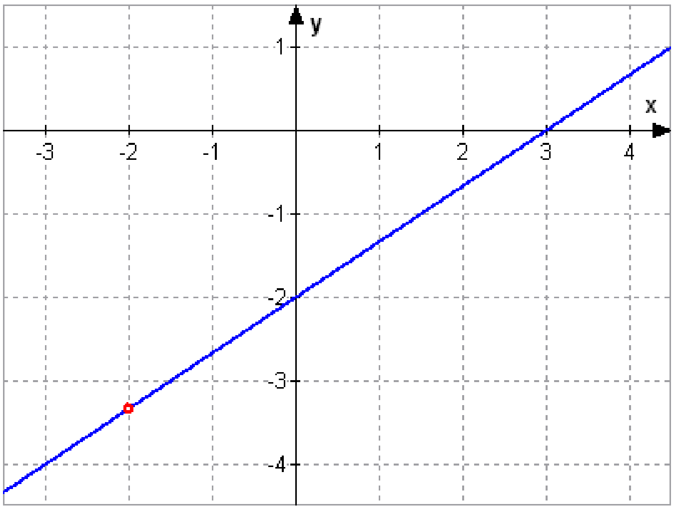
Zunächst wird der Zähler zerlegt: $f(x) = \dfrac{2(x^2 - x - 6)}{3(x + 2)} = \dfrac{2(x - 3)(x + 2)}{3(x + 2)}$

Man erkennt, dass f an der Stelle x=-2 nicht definiert ist. Es ist also **D = IR \ {-2}** .
Für alle x-Werte außer x= -2 kann man den Funktionsterm kürzen, so dass sich

$g(x) = \dfrac{2}{3}\ x - 2$ ergibt . Diese Funktion g heißt „**Ersatzfunktion**“ bezüglich f .

g ist in diesem Fall eine Gerade mit dem Funktionswert y=-10/3 an der Stelle x=-2 .
f stimmt mit g bis auf den an der Stelle x=-2 fehlenden Punkt überein und lässt sich an dieser Stelle „stetig ergänzen“, d.h.: Würde man den fehlenden Punkt P(-2 ; -10/3) einsetzen, so wäre f lückenlos . Eine solche stetige Ergänzbarkeit ist bei Polstellen nicht möglich !

Graph von f:



Wegen der Einfachheit der Ersatzfunktion verzichten wir hier auf eine Kurvendiskussion.

Beispiel 3: $f_k(x) = \dfrac{(x-k)(x+3)}{x^2-4}$ (eine nicht ganz einfache Funktionenschar)

Hier sieht man, dass gilt: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$. Dies gilt für alle k .

Falls der Zähler nicht gleichzeitig Null wird haben wir es bei den Stellen -2 und 2 mit Polstellen zu tun. Dies gilt aber ersichtlich nicht für alle k, sondern es gibt 2 Ausnahmen, k=2 sowie k=-2:

<u>k=2:</u> $f_2(x) = \dfrac{(x-2)(x+3)}{x^2-4} = \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{x+3}{x+2}$, falls $x \neq 2$ gilt .

Die Ersatzfunktion ist hier $g_2(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$; $x \neq -2$

Es gilt $g_2(2) = 5/4 = 1{,}25$. Der Punkt P(2 ; 1,25) „stopft" die Lücke bei f_2 (s. Grafik unten).

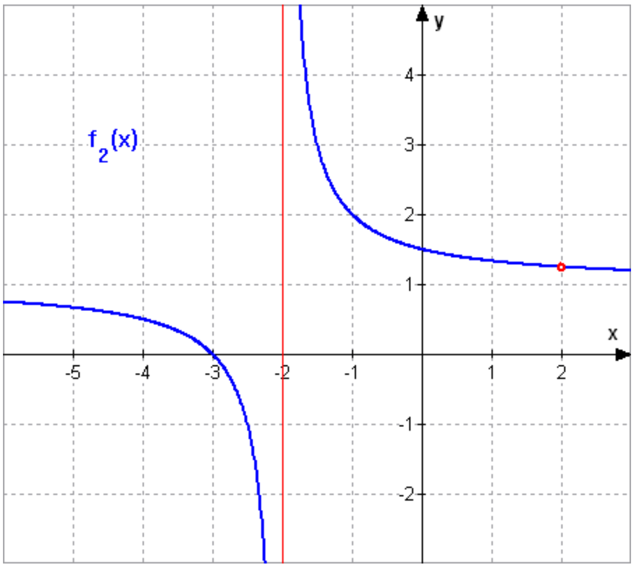
f_2 hat demnach einen Pol an der Stelle x=-2, eine hebbare Lücke an der Stelle x=2 mit dem Ersatzfunktionswert 1,25 und eine Nullstelle bei x=-3 .

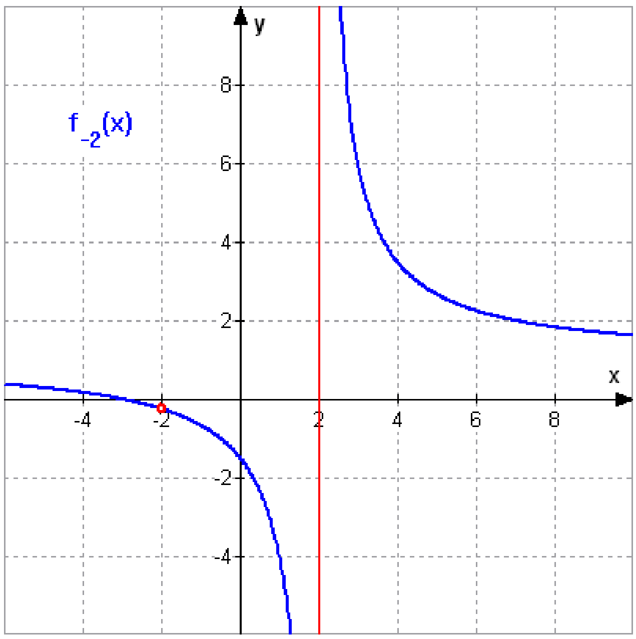
<u>k=-2:</u> Die Ersatzfunktion ist hier $g_{-2}(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$; $x \neq 2$

Es gilt $g_{-2}(-2) = -1/4 = -0{,}25$. Der Punkt Q(-2 ; -0,25) „stopft" die Lücke bei f_{-2} (s. Grafik unten).

f_{-2} hat demnach einen Pol an der Stelle x=2, eine hebbare Lücke an der Stelle x=-2 mit dem Ersatzfunktionswert -0,25 und eine Nullstelle bei x=-3 .

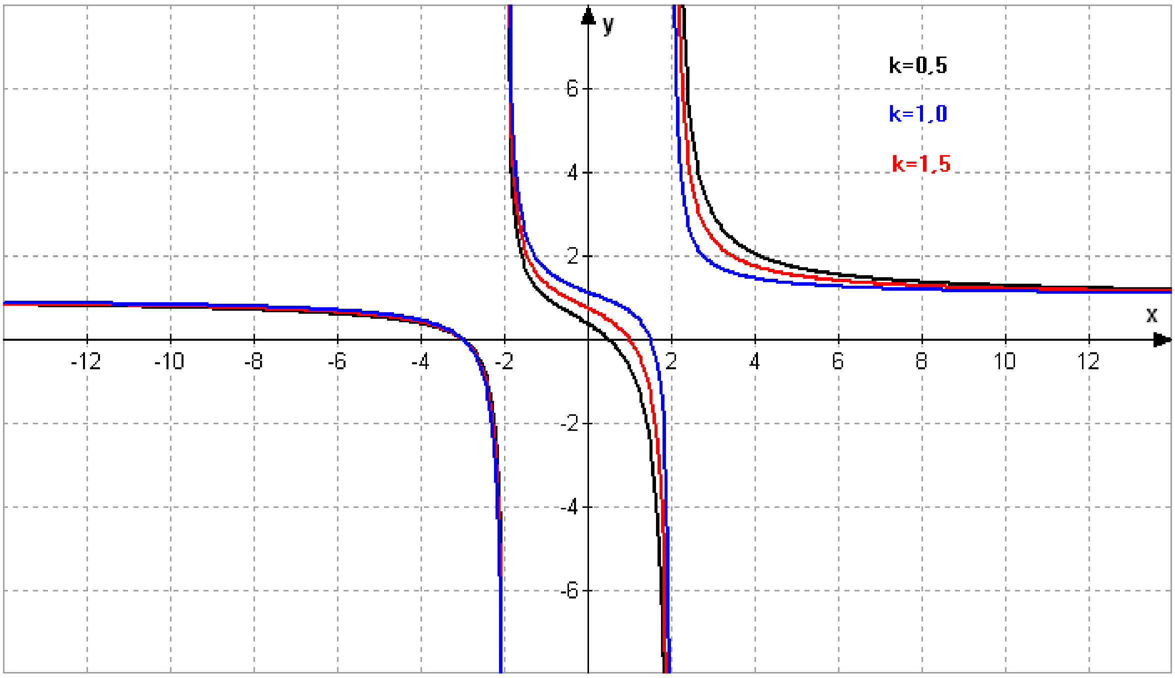
Graphen (mit ihren Polgeraden):

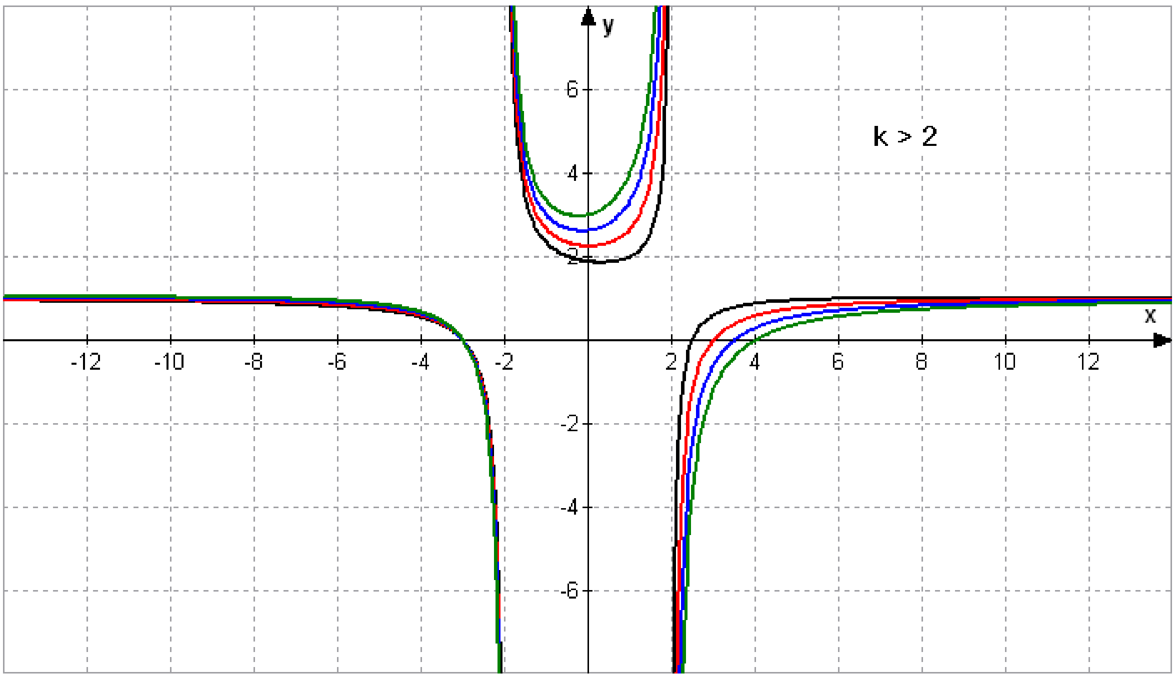




Für alle $k \neq 2$ und $k \neq -2$ existieren **2 Pole** und keine hebbaren Lücken ! Dies kann man an den unten abgebildeten Graphen sehen .

Einige Beispiele für k □2 und k□-2 :





Wie man sieht können die Graphen ganz unterschiedlich verlaufen.

<u>Anmerkung:</u> Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurden hier die Pole weggelassen .

Asymptote:

Es sieht so aus, als hätte die Asymptote die Gleichung $y = 1$.
Für welche k-Werte lässt sich das nachweisen ??

Lösung: $$\frac{(x-k)(x+3)}{x^2-4} = \frac{x^2-3k+(3-k)x}{x^2-4} = \frac{x^2-4+4+3k+(3-k)x}{x^2-4} = 1+\frac{4+3k+(3-k)x}{x^2-4}$$

Der Term strebt gegen 1, falls $x \to \pm\infty$ strebt, und dies unabhängig von k !!
Also hat bei allen Graphen der Schar die Asymptote die Gleichung $y = 1$.

Nullstellen: x=k (falls $k \neq 2$ und $k \neq -2$) sowie x=-3

1. Ableitung:

$$f_k'(x) = \frac{(2x+3-k)(x^2-4)-(x^2+3x-kx-3k)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{2x^3+3x^2-kx^2-8x-12+4k-2x^3-6x^2+2kx^2+6kx}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{(k-3)x^2+(6k-8)x+4k-12}{(x^2-4)^2}$$ das war schon ziemlich viel Arbeit !

Wegen der aufwändigen Rechnerei verzichten wir auf eine allgemeine Bestimmung der Extrem- und Wendepunkte . Das wäre eine schöne Aufgabe für ein CAS !

Beispiel 4: $f(x) = \frac{x^2-3x-10}{x-5}$

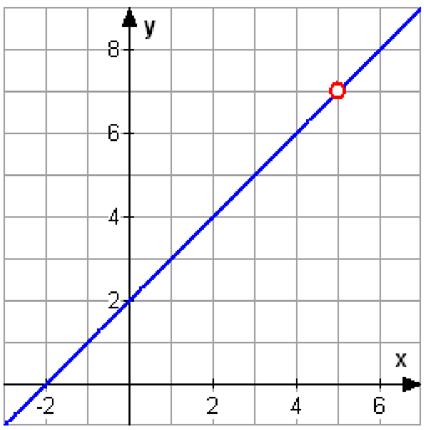
Hier kann man folgendermaßen zerlegen: $\frac{x^2-3x-10}{x-5} = \frac{(x-5)(x+2)}{x-5}$

Man erkennt nun bereits folgendes:
- Nullstelle x = -2
- hebbare Definitionslücke bei x = 5 (Ersatzfunktion g(x) = x+2)
- keine Polstelle

Zur Bestimmung der Asymptote zerlegt man so: $\frac{x^2-3x-10}{x-5} = \frac{x(x-5)+2x-10}{x-5} = x + \frac{2x-10}{x-5}$

Da der Bruchterm gegen 2 strebt ergibt sich für die Asymptote die Gleichung **y = x+2 .**

Graph:



<u>Ein Anwendungsbeispiel aus der Physik:</u>

Ein Stromversorgungsgerät hat unbelastet eine Spannung von $U = 230V$ und besitzt einen Innenwiderstand von $R_i = 8\Omega$.
Welchen Widerstand R_a muss ein angeschlossenes Gerät aufweisen, wenn die aufzunehmende Leistung P maximal werden soll („Leistungsanpassung") ?

<u>Lösung:</u>

Die aufgenommene Leistung beträgt $P = I \cdot U_{Kl} = I \cdot I \cdot R_a = I^2 \cdot R_a$
(U_{Kl} = „Klemmenspannung")

Für die Stromstärke gilt: $I = \dfrac{U_o}{R_i + R_a}$ Uo ist die sog. „Urspannung"

Setzt man dies in die Gleichung für P ein, so ergibt sich $P = \left(\dfrac{U_o}{R_i + R_a}\right)^2 \cdot R_a = \dfrac{U_o^{\,2} \cdot R_a}{(R_i + R_a)^2}$

P hängt also von Ra ab gemäß der Vorschrift: $P(R_a) = \dfrac{(230V)^2 \cdot R_a}{(8\Omega + R_a)^2}$

Die Grafik zeigt, dass die Leistung im Bereich von 8Ω maximal ist .
Rechnerisch kann man nachweisen, dass die Lösung exakt 8Ω ist .

Daher ist die Leistung genau dann maximal, wenn das angeschlossene Gerät den gleichen Widerstand besitzt wie der Innenwiderstand .