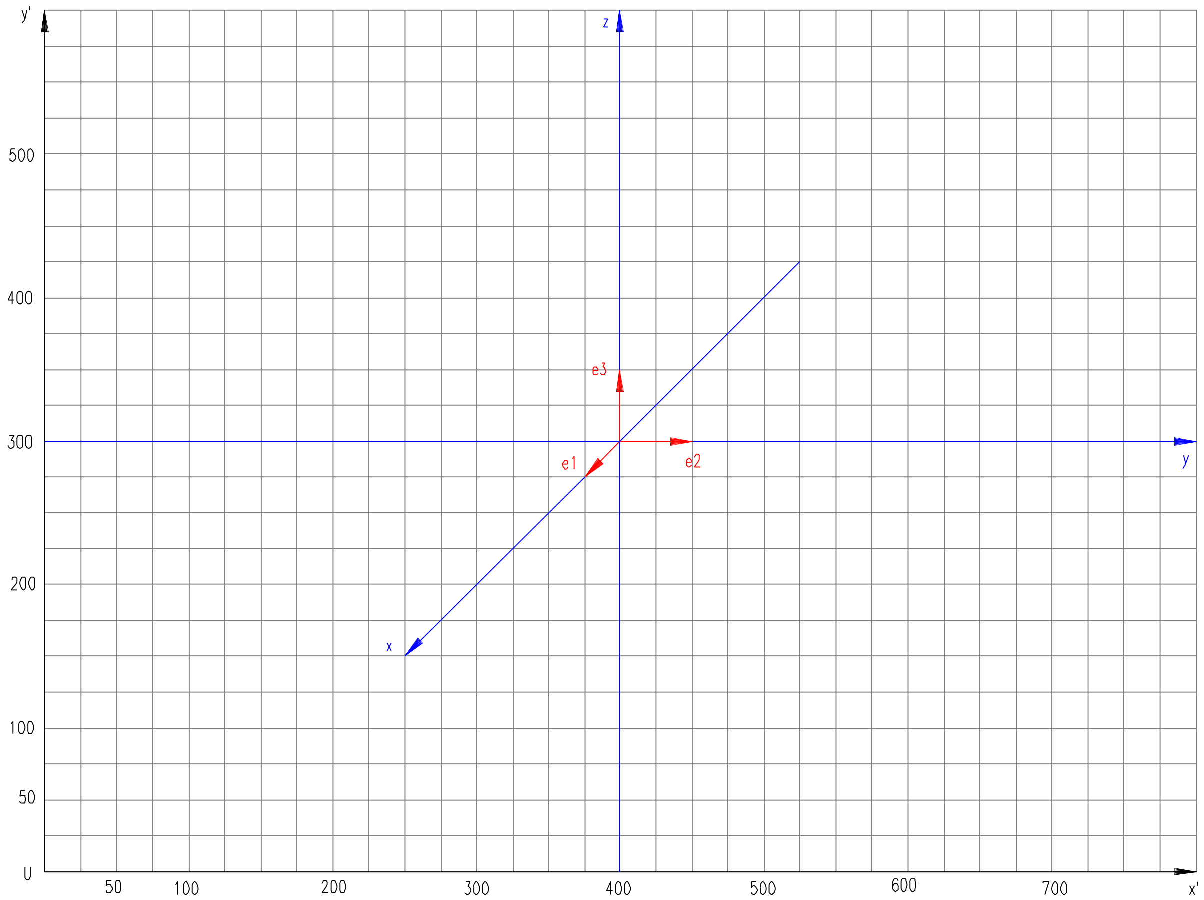
3D-Darstellung am Computer *Ac*

Bei 3-dimensionalen Darstellungen am Computer ist das Problem, jeden Punkt P(x;y;z) des Raumes durch eine Transformationsvorschrift auf einen Bildpunkt P'(x';y') des 2-dimensionalen Bildschirms darzustellen . Hierbei hat sich die Verwendung einer sogenannten Abbildungsmatrix A bewährt.

<u>Aufgabe:</u>
Auf einem Computerbildschirm mit 800 mal 600 Pixels soll ein 3D-System in sogenannter Kavalierprojektion abgebildet werden: z-Achse nach oben, y-Achse nach rechts, x-Achse nach vorne, links im 45°-Winkel. Ursprung genau in der Bildschirmmitte. Die y-Achse soll auf 800 Pixeln genau 16 Einheiten erhalten, also 50 Pixels pro y-Einheit ($y \in [-8 ; 8]$) . Die z-Achse soll ebenfalls 50 Pixels pro Einheit erhalten, was genau 12 Einheiten entspricht ($y \in [-6 ; 6]$) . Auf der x-Achse soll die Einteilung das $\sqrt{1/2}$ - fache der y-Einteilung sein. Dort sollen 11 Einheiten verwendet werden ($x \in [-5{,}5 ; 6]$) .



Gesucht ist eine Abbildungsmatrix A, welche beliebige Punkte P(x;y;z) auf P'(x';y') abbildet !

<u>Lösung:</u>

Wir verwenden folgenden Satz der Linearen Algebra:
Die *<u>Spalten</u>* der Matrix A sind die Basisvektoren (Einheitsvektoren) des 3D-Systems .

Man erkennt, dass die Einheitsvektoren des Systems folgendermaßen beschrieben werden können :

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} -25 \\ -25 \end{pmatrix} \qquad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Somit ist die gesuchte Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} -25 & 50 & 0 \\ -25 & 0 & 50 \end{pmatrix}$

Die Abbildungsvorschrift lässt sich nun leicht aufschreiben : $\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -25 & 50 & 0 \\ -25 & 0 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$

Da die Abbildungsmatrix von der Anzahl der Pixels pro Einheit (hier: 50) abhängt, kann man auch folgendes schreiben: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix} + 50 \cdot \begin{pmatrix} -0,5 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Ausgeschrieben bedeutet das für die Bildkoordinaten:
x' = 400 – 25x + 50y
y' = 300 – 25x + 50z

Beispielrechnungen:

(0/0/0) $\rightarrow$ (400/300)
(0/6/0) $\rightarrow$ (700/300)
(4/0/0) $\rightarrow$ (300/200)
(1/1/1) $\rightarrow$ (425/325)
(2/3,5/-4,5) $\rightarrow$ (525/25)

Aufgaben:

Die 3D-Darstellung auf dem Computer ist nicht eindeutig, da verschiedene 3D-Punkte auf ein und denselben 2D-Punkt des Computerbildschirms abgebildet werden können.
Untersuche, welche 3D-Punkte auf den 2D-Punkt (300/200) abgebildet werden .

Lösung:

Ansatz anhand der Abbildungsgleichung $\begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -25 & 50 & 0 \\ -25 & 0 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Umformung liefert das LGS: $\begin{vmatrix} 300 = 400 + (-25x) + 50y \\ 200 = 300 + (-25x) + 50z \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 = 100 - 25x + 50y \\ 0 = 100 - 25x + 50z \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x = 2y + 4 \\ z = y \end{vmatrix}$

Es ergibt sich (wie erwartet) eine nicht eindeutige Lösung.
Wir wählen y und berechnen dann z und x.
Z. B. y = 0 liefert z = 0 und x = 4. y = 1 liefert z = 1 und x = 6.
Einige Beispiele für Punkte, die auf (300/200) abgebildet werden:
(4/0/0) (6/1/1) (2/-1/-1) (8/2/2) (0/-2/-2)