Das HORNER-Schema

11-84 bis 03-2020 Ac

Betrachtet man die Nullstelle x_0 eines Polynoms f(x), so ergibt sich mit Hilfe der Polynomdivision das Zerlegungspolynom.

Beispiel: $f(x) = 0{,}05x^4 - 0{,}2x^3 - 0{,}85x^2 + 1{,}2x + 1{,}8$. Betrachtete (Null)-Stelle sei $x_0 = 2$.

Man erhält das Zerlegungspolynom $h(x) = 0{,}05x^3 - 0{,}1x^2 - 1{,}05x - 0{,}9$.

Bei der Polynomdivision benötigt man n Divisionen, (2n) Multiplikationen, (2n) Subtraktionen sowie viel Schreibarbeit. Für das obige Beispiel hat man also 20 Grundrechenoperationen durchzuführen.

Wesentlich einfacher findet man das **Zerlegungspolynom** mit Hilfe des HORNER-Schemas.

Ein weiterer Vorteil des HORNER-Schemas ist seine universellere Einsetzbarkeit, z.B. zum Berechnen
von **Funktionswerten**,
von **Basisumwandlung** allg. Basis g ≠ 10 wird umgewandelt in das 10er - System,
von sämtlichen (auch höheren) **Ableitungswerten** von f.

Schließlich kann mit Hilfe des vollständigen HORNER-Schemas ein Polynom an einer beliebigen Stelle x_0 **entwickelt** werden, $p(x-x_0)$.

Anwendung des Schemas:

1) Wir berechnen das Zerlegungspolynom h(x) für obiges Beispiel von f(x) mit Nullstelle $x_0 = 2$:
Der untere Wert bei h(x) wird immer mit 2 multipliziert und das Ergebnis am Ende des Pfeils als g(x) notiert; nun wird zu diesem Ergebnis der oben stehende Koeffizient von f(x) addiert ; man erhält dann den ganz unten stehenden neuen Koeffizienten für h(x) .

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	Potenzen von f
f(x)	0,05	-0,2	-0,85	1,2	1,8	Koeffizienten von f
	+	+	+	+	+	werden addiert zu
g(x)	0	0,1	-0,2	-2,1	-1,8	Koeff. von g
h(x)	0,05 ↗	-0,1 ↗	-1,05 ↗	-0,9 ↗	0 = f(2)	multipliziere in Pfeilrichtung mit $2 = x_0$

Wie man sieht, benötigt man hier 4 Multiplikationen und 4 Additionen (Addition von 0 kann entfallen !) .

2) Wie wandelt man **Dualzahlen** mittels des HORNER-Schemas in das **Zehnersystem** um ?

Beispiel: $11010011_2 = ?_{10}$

Es ist $11010011_2 = 1\cdot2^7 + 1\cdot2^6 + 0\cdot2^5 + 1\cdot2^4 + 0\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 1\cdot2^0$

x_0 ist hier gleich 2 und die 2er-Potenzen werden der Reihe nach aufgeschrieben

2^7	**2^6**	**2^5**	**2^4**	**2^3**	**2^2**	**2^1**	**2^0**
1	1	0	1	0	0	1	1
+	+	+	+	+	+	+	+
0	2	6	12	26	52	104	210
1	3	6	13	26	52	105	**211 = dezimales Ergebnis**

Das vollständige HORNER-Schema

Mittels des vollständigen HORNER-Schemas lassen sich sämtliche Ableitungen eines Polynoms berechnen. Außerdem erhält man automatisch die Koeffizienten A_i des **Entwicklungspolynoms** an der Stelle x_0 . Rechnung für obiges Beispiel (diesmal mit $x_0 = 1$) :

i = 4	**i = 3**	**i = 2**	**i = 1**	**i = 0**
0,05	-0,2	-0,85	1,2	1,8
+	+	+	+	+
0	0,05	- 0,15	-1	0,2
0,05	-0,15	-1	0,2	2 = f(1) = A0
+	+	+	+	
0	0,05	- 0,1	-1,1	
0,05	-0,1	-1,1	- 0,9 = f '(1) = A1	
+	+	+		
0	0,05	- 0,05		
0,05	-0,05	-1,15 = f ''(1) / 2! = A2		
+	+			
0	0,05			
0,05	0 = f '''(1) / 3! = A3			
+				
0				
0,05 = f ''''(1) / 4! = A4				

Zunächst sieht man, dass sich die Ableitungen an der Stelle 1 leicht ablesen lassen;
z.B. ergibt sich f ''''(1) = 0,05 · 4! = 1,2 .
Entsprechend f ''(1) = -1,15 · 2! = -2,3

A0, A1, A2, A3, A4 sind die Koeffizienten des Entwicklungspolynoms, so dass sich folgendes ergibt :

$f(x) = 0,05\cdot(x-1)^4 - 1,15\cdot(x-1)^2 - 0,9\cdot(x-1) + 2$.

<u>Anwendungsbeispiel:</u> Die Funktion f soll in der Umgebung von x = 1 betrachtet werden.

Dazu setzt man x = 1 + h und betrachtet betragsmäßig kleine h Werte in der Umgebung von 1.
Setzt man in dem Entwicklungspolynom für x den Term 1+h ein, so erhält man:

$$f(1+h) = 0,05h^4 -1,15h^2 - 0,9h + 2 .$$

Da die höheren Potenzen für <u>kleine h</u> vernachlässigbar sind, ergibt sich als Näherungsformel:

$$f(1+h) \approx 2 - 0,9h .$$

HORNER-Schema programmiert in JAVA:

```java
public static double fPolynom(double[] a, double x0) {
    // berechnet den Funktionswert f(x) des Polynoms
    // p(x) = a0 + a1x + a2x² + ... + a(n-1)x^(n-1)+ a(n)x^n
    int n = a.length - 1; // n = Grad des Polynoms
    double erg = a[n];
    for (int i = n - 1; i >= 0; i--)
       erg = erg * x0 + a[i];
    return erg;
 }

 public static double[] deflation(double[] a, double x0) {
    // berechnet die Koeffizienten des Zerlegungspolynoms r(x) = f(x) / (x-x0),
    // falls f(x0) = 0 .            Methode: HORNER-Schema
    if (!Math.abs(fPolynom(a, x0)) < 1E-15) // f(x0) ≠ 0 ?
       throw new IllegalArgumentException(x0 + " ist keine Nullstelle !");
    int n = a.length - 1; // n = Grad des Polynoms
    double[] rPol = new double[n];
    rPol[n-1] = a[n];
    for (int i = n - 1; i > 0; i--)
          rPol[i-1] = rPol[i] * x0 + a[i];
    return rPol;
 }


 public static double[] hornerKomplett(double[] a, double x0) {
    // berechnet die Koeffizienten ai des vollständigen HORNER-Schemas
    // außerdem gilt für die Ableitungen:  f(i')(x0) = ai * i!
    int n = a.length - 1; // n = Grad des Polynoms a
    for (int j = 0; j <= n; j++) { // Index des Entwicklungspolynoms-Koeffizienten
          for (int i = n-1; i >= j; i--)
                a[i] = a[i+1] * x0 + a[i];
          if (Math.abs(a[j]) < 1E-15) // a[j] = 0 ?
                a[j] = 0.0;
    }
    return a;
 }
```