Linksinverse Rechtsinverse Pseudoinverse Matrix   Ac 2020

Linksinverse und Rechtsinverse einer Matrix A

Def.: Gegeben sei eine **(m, n)** - Matrix A .
Eine (n, m) - Matrix X heißt **Linksinverse** von A, wenn gilt: $XA = E_n$.
Eine (n, m) - Matrix X heißt **Rechtsinverse** von A, wenn gilt: $AX = E_m$.

Beispiel (3,2)-Matrix : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ rang(A) = 2 .

Ansatz für die Rechtsinverse von A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ 4a+3d & 4b+3e & 4c+3f \\ 3a+4d & 3b+4e & 3c+4f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dies ergibt 9 Gleichungen mit 6 Unbekannten a, b, c, d, e, f :

·a	·b	·c	·d	·e	·f	·1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0
4	0	0	3	0	0	0
0	4	0	0	3	0	1
0	0	4	0	0	3	0
3	0	0	4	0	0	0
0	3	0	0	4	0	0
0	0	3	0	0	4	1

rref:

·a	·b	·c	·d	·e	·f	·1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

In der 3.Zeile von unten steht ein Widerspruch 0 = 1.

Daher hat das System keine Lösung !

Folgerung: Es gibt **keine** Rechtsinverse für A !

Ansatz für die Linksinverse von A:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+4b+3c & a+3b+4c \\ d+4e+3f & d+3e+4f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

<table>
<tr>
<td>

$$\begin{array}{cccccc|c} \cdot a & \cdot b & \cdot c & \cdot d & \cdot e & \cdot f & \cdot 1 \\ \hline 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}$$

</td>
<td>

Nach Anwenden von rref folgt:

$$\begin{array}{cccccc|c} \cdot a & \cdot b & \cdot c & \cdot d & \cdot e & \cdot f & \cdot 1 \\ \hline 1 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}$$

</td>
<td>

Daher gibt es 4 Bedingungen:

a + 7c = -3
b - c = 1
d + 7f = 4
e - f = -1

</td>
</tr>
</table>

Es gibt demnach <u>beliebig viele</u> Möglichkeiten für die Linksinverse:

Z.B.: $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ oder $X = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ usw. .

Probe: $$X \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+4 & -3+3 \\ 4-4 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ q.e.d.

Satz: Eine (m,n) - Matrix A hat

- mindestens eine Linksinverse, wenn gilt: **rang**(A) = n
- mindestens eine Rechtsinverse, wenn gilt: **rang**(A) = m

<u>Weiteres Beispiel (4 , 3):</u> $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ rang(A) = 3 .

Eine Rechtsinverse existiert hier nicht, wohl aber eine Linksinverse.

Ansatz für die Linksinverse von A:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a+b+2d & 2a+b+c-d & 3a+2c-d \\ e+f+2h & 2e+f+g-h & 3e+2g-h \\ i+j+2m & 2i+j+k-m & 3i+2k-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

9 Gleichungen mit 12 Unbekannten:

LGS:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	1
1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	1	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	2	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	2	1	1	−1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	3	0	2	−1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2	0
0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	1	−1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	2	−1	1

rref:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	1
1	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	2
0	1	0	−3	0	0	0	0	0	0	0	0	−1
0	0	1	−8	0	0	0	0	0	0	0	0	−3
0	0	0	0	1	0	0	5	0	0	0	0	−2
0	0	0	0	0	1	0	−3	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	0	1	−8	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	5	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	−3	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	−8	−1

9 Bedingungen für beliebig viele Lösungen:

a + 5d = 2 b - 3d = -1 c - 8d = -3 e + 5h = -2 f - 3h = 2 g - 8h = 3
i + 5m = 1 j - 3m = -1 k - 8m = -1

Mögliche Linksinverse von A: $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ -7 & 5 & 11 & 1 \\ -4 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

Probe: $\mathrm{X} \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ -7 & 5 & 11 & 1 \\ -4 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ q.e.d.

Pseudoinverse A^+ einer Matrix A

Ac 2020

Def.: Gegeben sei eine **(m,n)** - Matrix A .

Dann gibt es stets eine <u>eindeutig</u> definierte PseudoInverse A^+ von A mit :

$$\mathbf{A \cdot A^+ \cdot A = A \quad \wedge \quad A^+ \cdot A \cdot A^+ = A^+}$$

Wir unterscheiden 3 Fälle:

1) Die <u>Spalten</u> von A sind linear unabhängig:

Dann gilt: $\mathbf{A^+ = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T}$

Folgerung: $\mathbf{A^+ \cdot A = E}$ (A^+ ist Linksinverse von A)

2) Die <u>Zeilen</u> von A sind linear unabhängig:

Dann gilt: $\mathbf{A^+ = A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1}}$

Folgerung: $\mathbf{A \cdot A^+ = E}$ (A^+ ist Rechtsinverse von A)

3) <u>Weder</u> die Zeilen <u>noch</u> die Spalten von A sind linear unabhängig:

Es existieren dann weder $(A^T \cdot A)^{-1}$ noch $(A \cdot A^T)^{-1}$.
Daher müssen andere Formeln verwendet werden (z.B. Greville-Algorithmus; s.u.)

<u>Beispiel zum Fall 2):</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 20 \\ 4 & 20 & 40 \end{pmatrix} \text{ ist singulär, also nicht invertierbar}$$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 9 & -15 \\ -15 & 45 \end{pmatrix} \text{ ist invertierbar : } \quad (A \cdot A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/12 \\ 1/12 & 1/20 \end{pmatrix}$$

Die Pseudoinverse ist dann: $A^+ = A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 0 & -1/15 \\ 0 & -2/15 \end{pmatrix}$

Dass A^+ Rechtsinverse von A ist, beweist das Produkt:

$$A \cdot A^+ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 0 & -1/15 \\ 0 & -2/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Beispiel zum Fall 3) - Lösung hier mit Skelettierung: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Rang $r = 2$.

Hier sind die Zeilen linear abhängig (l.a.), denn es gilt: Zeile3 = Zeile1 + Zeile2 .

Auch die Spalten sind linear abhängig: Spalte4 = 3·Spalte1 - Spalte2 - 2·Spalte3 .

Daher existiert weder die Inverse von $A^T \cdot A$ noch diejenige von $A \cdot A^T$.

Folgende Vorgehensweise ("Skelettierung" von A) liefert die PseudoInverse:

Zerlege A in das Produkt B·C mit $B = (A_1 \ldots A_r)$; $A_1 \ldots A_r$ sind die ersten **r** l.u. Spalten von A .

$$\text{Ansatz für } r = 2: \; A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}$$

$$\text{Dies führt auf 4 LGSe :} \; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{usw.}$$

$$\text{Hat man alle } c_{ij} \text{ bestimmt, so ergibt sich die Zerlegung } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit den ermittelten B und C gilt: $\mathbf{A^+ = C^+ \cdot B^+ = C^T \cdot (C \cdot C^T)^{-1} \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T}$

$$C \cdot C^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (C \cdot C^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; C^+ = C^T \cdot (C \cdot C^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \quad (B^T \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2/3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; B^+ = (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^+ = C^+ \cdot B^+ = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/9 & 1/9 & 2/9 \\ 2/9 & -1/9 & 1/9 \\ 4/9 & 1/9 & 5/9 \end{pmatrix}$$

Im Gegensatz zu den Fällen 1) und 2) gelten hier: $A^+ \cdot A \neq E \;\wedge\; A \cdot A^+ \neq E \;\wedge\; A \cdot A^+ \neq A^+ \cdot A$

Die Skelettierung ist für eine Computer-Programmierung nicht sehr geeignet !

In der Praxis verwendet man daher die **"Singulärwertzerlegung"** oder den **"Greville-Algorithmus" .**

Algorithmus von GREVILLE zur Berechnung von A^+ :

Gegeben sei die (m, n)-Matrix A ; m Zeilen und n Spalten :

a_k = Spaltenvektor = (m, 1)-Matrix; k-te Spalte von A

$A_k = (a_1, \dots , a_k)$ ist die von den ersten k Spalten von A gebildete Untermatrix, wobei $A_1=a_1$, $A_n=A$

d_k , c_k , b_k , B_k , A_k^+ werden dann nach folgendem Algorithmus erzeugt :

<u>Algorithmus:</u>

falls a_1 = 0-Vektor ; Spaltenvektor mit m Zeilen; (m, 1)-Matrix

dann A_1^+ = 0-Vektor ; Zeilenvektor mit m Spalten; (1, m)-Matrix

sonst $A_1^+ \; (= a_1^+) = a_1^T / (a_1^T \cdot a_1)$; Nenner = Skalarprodukt $a_1 * a_1$!

für k von 2 bis n wiederhole

bestimme a_k

$d_k = A_{k-1}^+ \cdot a_k$

d_k = (k-1, 1)-Matrix für k > 2 (1- elementige Matrix für k = 2)

bestimme A_{k-1} ; $A_{k-1} = (a_1 \; a_2 \dots a_{k-1})$ = (m, k-1)-Matrix

$c_k = a_k - A_{k-1} \cdot d_k$; c_k = (m, 1)-Matrix

falls $c_k \neq$ 0-Vektor

dann $b_k = c_k^+$; gemäß $\mathbf{c^+ = (c^T \cdot c)^{-1} \cdot c^T}$ bzw. $\mathbf{c^+ = c^T \cdot (c \cdot c^T)^{-1}}$

sonst $b_k = (1 + d_k^T \cdot d_k)^{-1} \cdot d_k^T \cdot A_{k-1}^+$; b_k = (1, m)-Matrix

$B_k = A_{k-1}^+ - d_k \cdot b_k$; B_k = (k-1, m)-Matrix

$A_k^+ = \begin{pmatrix} B_k \\ b_k \end{pmatrix}$; A_k^+ = (k, m)-Matrix ; $A^+ = A_n^+$ = (n, m)-Matrix

<u>Der Algorithmus erlaubt eine vollständige Rechnung mit Bruchzahlen !</u>

Beispiel: $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}$

$$A_1^+=\frac{a_1^T}{a_1^T\cdot a_1}=\frac{\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}}{1\cdot1+2\cdot2}=\frac{\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}}{5}=\begin{pmatrix}0,2&0,4\end{pmatrix}$$

$$d_2=A_1^+\cdot a_2=\begin{pmatrix}0,2&0,4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=0,2\cdot1+0,4\cdot2=1$$

$A_1\cdot d_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=a_2$, daher b_2 mit alternativer Formel berechnen:

$$b_2=(1+d_2^T\cdot d_2)^{-1}\cdot d_2^T\cdot A_1^+=(1+1\cdot1)^{-1}\cdot1\cdot\begin{pmatrix}0,2&0,4\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0,2&0,4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,1&0,2\end{pmatrix}$$

$$B_2=A_1^+-d_2\cdot b_2=\begin{pmatrix}0,2&0,4\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}0,1&0,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,1&0,2\end{pmatrix}$$

Wir erhalten: $A_2^+=\begin{pmatrix}B_2\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,1&0,2\\0,1&0,2\end{pmatrix}$

$$d_3=A_2^+\cdot a_3=\begin{pmatrix}0,1&0,2\\0,1&0,2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,5\\0,5\end{pmatrix}$$

$A_2\cdot d_3=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,5\\0,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=a_3$, daher b_3 mit alternativer Formel berechnen:

$$b_3=(1+d_3^T\cdot d_3)^{-1}\cdot d_3^T\cdot A_2^+=(1+\begin{pmatrix}0,5&0,5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,5\\0,5\end{pmatrix})^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0,5&0,5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,1&0,2\\0,1&0,2\end{pmatrix}=$$

$$(1+0,5)^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0,1&0,2\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}0,1&0,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{15}&\frac{2}{15}\end{pmatrix}$$

$$B_3=A_2^+-d_3\cdot b_3=\begin{pmatrix}0,1&0,2\\0,1&0,2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,5\\0,5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{15}&\frac{2}{15}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,1&0,2\\0,1&0,2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{30}&\frac{1}{15}\\\frac{1}{30}&\frac{1}{15}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{15}&\frac{2}{15}\\\frac{1}{15}&\frac{2}{15}\end{pmatrix}$$

Das Ergebnis ist also: $A^+=A_3^+=\begin{pmatrix}\frac{1}{15}&\frac{2}{15}\\\frac{1}{15}&\frac{2}{15}\\\frac{1}{15}&\frac{2}{15}\end{pmatrix}$

Ein Beispiel (Greville-Alg) mit OCTAVE durchgerechnet:

```
>> format rat
>> A=[1 1 1 3; 2 2 2 2; 3 3 3 5]
A =
  1  1  1  3
  2  2  2  2
  3  3  3  5

>> a1=A(:,1)
a1 =
  1
  2
  3

>> A1p=a1'/(a1'*a1)    % A1p = A1+
A1p =
     1/14        1/7       3/14

>> k=2;
>> a2=A(:,2)
a2 =
        1
        2
        3

>> d2=A1p*a2
d2 = 1

>> A1=A(:,[1])
A1 =
        1
        2
        3

>> c2=a2-A1*d2
c2 =
        0
        0
        0

>> b2=(1+d2'*d2)^-1*d2'*A1p
b2 =
     1/28       1/14       3/28

>> B2=A1p-d2*b2
B2 =
     1/28       1/14       3/28

>> A2p=[B2;b2]
A2p =
     1/28       1/14       3/28
     1/28       1/14       3/28

>> k=3;
>> a3=A(:,3)
a3 =
        1
        2
        3
```

```
>> d3=A2p*a3
d3 =
     1/2
     1/2

>> A2=A(:,[1 2])
A2 =
      1       1
      2       2
      3       3

>> c3=a3-A2*d3
c3 =
      0
      0
      0

>> b3=(1+d3'*d3)^-1*d3'*A2p
b3 =
    1/42    1/21    1/14

>> B3=A2p-d3*b3
B3 =
    1/42    1/21    1/14
    1/42    1/21    1/14

>> A3p=[B3;b3]
A3p =
    1/42    1/21    1/14
    1/42    1/21    1/14
    1/42    1/21    1/14

>> k=4;
>> a4=A(:,4)
a4 =
      3
      2
      5

>> d4=A3p*a4
d4 =
   11/21
   11/21
   11/21

>> A3=A(:,[1 2 3])
A3 =
      1       1       1
      2       2       2
      3       3       3

>> c4=a4-A3*d4
c4 =
    10/7
    -8/7
     2/7

>> b4=pinv(c4)
b4 =
    5/12    -1/3    1/12
```

```
>> B4=A3p-d4*b4
B4 =
     -7/36        2/9       1/36
     -7/36        2/9       1/36
     -7/36        2/9       1/36

>> A4p=[B4;b4]     % A4p = A+  ist die Lösung
A4p =
     -7/36        2/9       1/36
     -7/36        2/9       1/36
     -7/36        2/9       1/36
      5/12       -1/3       1/12

>> Aplus=pinv(A)   % zur Kontrolle
Aplus =
     -7/36        2/9       1/36
     -7/36        2/9       1/36
     -7/36        2/9       1/36
      5/12       -1/3       1/12

>>
```

Beispiele für PseudoInversen A+ von A mittels pinv(A) - MATLAB / OCTAVE

Beispiel 1:

```
format rat

A=[1 -1 2 0;-1 2 -3 1;0 1 -1 1]
A =
   1  -1   2   0
  -1   2  -3   1
   0   1  -1   1

Aplus = pinv(A)
Aplus =
        1/3         0          1/3
        1/9        1/9         2/9
        2/9       -1/9         1/9
        4/9        1/9         5/9

A*Aplus
ans =
        2/3       -1/3         1/3
       -1/3        2/3         1/3
        1/3        1/3         2/3

Aplus*A
ans =
        1/3          0         1/3         1/3
          0        1/3        -1/3         1/3
        1/3       -1/3         2/3           0
        1/3        1/3           0         2/3
```

Beispiel 2:

```
B=[1 1;2 2];
B =
          1          1
          2          2

>> Bplus=pinv(B)
Bplus =
       1/10        1/5
       1/10        1/5
```

Beispiel 3: Interessantes Beispiel: Nullmatrix !

```
N=[0 0 0;0 0 0];
N =
          0          0          0
          0          0          0

>> Nplus=pinv(N)
Nplus =
          0          0
          0          0
          0          0
```

Beispiel 4:

```
A=[1 1 1 1;2 2 2 2;3 3 3 3];
>> A
A =

 1 1 1 1
 2 2 2 2
 3 3 3 3

>> format
>> Aplus=pinv(A)
Aplus =

 0.0178571 0.0357143 0.0535714
 0.0178571 0.0357143 0.0535714
 0.0178571 0.0357143 0.0535714
 0.0178571 0.0357143 0.0535714

>> format rat
>> Aplus
Aplus =

       1/56       1/28       3/56
       1/56       1/28       3/56
       1/56       1/28       3/56
       1/56       1/28       3/56
```