Eigenwert, Eigenvektor, Matrixnorm, Konditionszahl einer Matrix

1) ***Eigenwerte und Eigenvektoren***:

Für eine (n, n) - Matrix A ist eine Zahl λ (reell oder komplex) und ein Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ gesucht mit

$$\boxed{A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \qquad \lambda \text{ heißt Eigenwert und } \vec{x} \text{ Eigenvektor von A}}$$

Die Länge des Eigenvektors ist nicht festgelegt, so dass auch Vielfache Eigenvektoren sind !

Geometrische Interpretation für $\lambda \in \mathbb{R}$: Der Vektor $\vec{x}$ soll parallel zum Vektor $A \cdot \vec{x}$ verlaufen !

$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ lässt sich umformen zu $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot E \cdot \vec{x}$ bzw. $\boxed{(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0}}$

Diese Gleichung gilt genau dann, wenn $\boxed{\det(A - \lambda \cdot E) = 0}$ ist .

Die Determinante det(...) liefert ein Polynom $P_n(\lambda)$, das so genannte "charakteristische Polynom" , dessen Nullstellen die Eigenwerte von A sind . Daher hat eine (n, n) - Matrix n Eigenwerte.

Für das charakteristische Polynom gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_n(\lambda) = c_n \cdot \lambda^n + c_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot \lambda + c_0 \quad \text{mit} \\[1em] c_0 = \det(A) \qquad c_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \text{spur}(A) \qquad c_n = (-1)^n \end{array}}$$

Beispiel 1:

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & -1,8 \\ -1,6 & 0,4 & 1,6 \\ -0,8 & 0,7 & -0,2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dann ist } A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & -1,8 \\ -1,6 & 0,4 & 1,6 \\ -0,8 & 0,7 & -0,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8-\lambda & 0,3 & -1,8 \\ -1,6 & 0,4-\lambda & 1,6 \\ -0,8 & 0,7 & -0,2-\lambda \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$P_3(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E) = (0,8-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 0,4-\lambda & 1,6 \\ 0,7 & -0,2-\lambda \end{vmatrix} - 0,3 \cdot \begin{vmatrix} -1,6 & 1,6 \\ -0,8 & -0,2-\lambda \end{vmatrix} + (-1,8) \cdot \begin{vmatrix} -1,6 & 0,4-\lambda \\ -0,8 & 0,7 \end{vmatrix}$$

$$= (0,8-\lambda) \cdot [(0,4-\lambda)(-0,2-\lambda) - 0,7 \cdot 1,6] - 0,3 \cdot [-1,6 \cdot (-0,2-\lambda) - (-0,8) \cdot 1,6] +$$
$$(-1,8) \cdot [-1,6 \cdot 0,7 - (-0,8) \cdot (0,4-\lambda)]$$
$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda$$

Man sieht hier, dass obige Beziehungen gelten (mit spur(A) = 0,8 + 0,4 - 0,2 = 1):

$c_0 = 0 = \det(A)$ (nachrechnen !) $\qquad c_2 = 1 = (-1)^{3-1} \cdot \text{spur}(A) \qquad c_3 = -1 = (-1)^3$

Die Nullstellen dieses Polynoms (die Eigenwerte von A) lassen sich leicht bestimmen zu:

$\lambda = 0$ $\qquad \lambda = -1$ $\qquad \lambda = 2$ $\qquad$ Eigenwerte von A

Zur Bestimmung der Eigenvektoren muss für jeden Eigenwert λ das folgende LGS gelöst werden:

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Für $\lambda = 0$ ergibt sich:

$$(A - E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & -1,8 \\ -1,6 & 0,4 & 1,6 \\ -0,8 & 0,7 & -0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} 0,8 & 0,3 & -1,8 & 0 \\ -1,6 & 0,4 & 1,6 & 0 \\ -0,8 & 0,7 & -0,2 & 0 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} 1 & 0 & -1,5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right|$$

Eine mögliche Lösung des homogenen LGS ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; Eigenvektor zu $\lambda = 0$

Man kann hier erkennen, dass auch Vielfache des gefundenen Eigenvektors eine Lösung sind !

Für $\lambda = -1$ ergibt sich:

$$(A + 1 \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1,8 & 0,3 & -1,8 \\ -1,6 & 1,4 & 1,6 \\ -0,8 & 0,7 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} 1,8 & 0,3 & -1,8 & 0 \\ -1,6 & 1,4 & 1,6 & 0 \\ -0,8 & 0,7 & 0,8 & 0 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right|$$

Eine mögliche Lösung des homogenen LGS ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; Eigenvektor zu $\lambda = -1$

Für $\lambda = 2$ ergibt sich:

$$(A - 2 \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1,2 & 0,3 & -1,8 \\ -1,6 & -1,6 & 1,6 \\ -0,8 & 0,7 & -2,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} -1,2 & 0,3 & -1,8 & 0 \\ -1,6 & -1,6 & 1,6 & 0 \\ -0,8 & 0,7 & -2,2 & 0 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right|$$

Eine mögliche Lösung des homogenen LGS ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; Eigenvektor zu $\lambda = 2$

Dass es auch **komplexe Eigenwerte** geben kann zeigt das

<u>Beispiel 2:</u> $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Dann ist $A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & 4 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ und

$$P_3(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E) = (-1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda) \cdot [-\lambda(2-\lambda) - (-1) \cdot (-1)] + 3 \cdot [2 - \lambda - 1 \cdot (-1)] + 4 \cdot [1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-\lambda)]$$

$$= (1+\lambda) \cdot (2\lambda - \lambda^2 + 1) + 3 \cdot (3-\lambda) + 4 \cdot (-1+\lambda) = 2\lambda - \lambda^2 + 1 + 2\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda + 5 + \lambda =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 6$$

Durch Probieren finden wir eine reelle Nullstelle: $\lambda_1 = 3$

Polynomdivision $-\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda - 6 : (3 - \lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$

Das Restpolynom hat die Nullstellen $x_{2/3} = -1 \pm \sqrt{(1-2)} = -1 \pm i$

Zur Bestimmung der Eigenvektoren muss für jeden Eigenwert λ das folgende LGS gelöst werden:

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Für $\lambda_1 = 3$ ergibt sich:

$$(A - 3 \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Eine mögliche Lösung des homogenen LGS ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; Eigenvektor zu $\lambda = 3$

Für $\lambda_2 = -1 - i$ ergibt sich:

$$(A + (1+i) \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} i & -3 & 4 \\ 1 & 1+i & -1 \\ 1 & -1 & 3+i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} i & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1+i & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3+i & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3+i & 0 \\ 0 & -2-i & 4+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{4+i}{2+i} \cdot x_3 = \frac{(4+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \cdot x_3 = \frac{8-2i-i^2}{5} \cdot x_3 = \frac{9-2i}{5} \cdot x_3 \Leftrightarrow 5x_2 = (9-2i) \cdot x_3$$

$$x_1 = x_2 - (3+i) \cdot x_3 = \frac{9-2i}{5} \cdot x_3 - (3+i) \cdot x_3 = \frac{9-2i-15-5i}{5} \cdot x_3 = \frac{-6-7i}{5} \cdot x_3 \Leftrightarrow 5x_1 = (-6-7i) \cdot x_3$$

Bei einer Wahl von $x_3 = 5$ erhalten wir $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6-7i \\ 9-2i \\ 5 \end{pmatrix}$; Eigenvektor zu $\lambda = -1 - i$

Für $\lambda_3 = -1 + i$ können wir ausnutzen, dass der zu λ_2 konjugiert komplexe Eigenwert auch einen konjugiert komplexen Eigenvektor besitzt:

Daher ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6+7i \\ 9+2i \\ 5 \end{pmatrix}$; Eigenvektor zu $\lambda = -1 + i$

Anmerkung zur Berechnung mit dem Computer:

Die Lösung homogener Linearer Gleichungssysteme ist extrem anfällig gegenüber den bei Gleitpunkt-Arithmetik unweigerlich auftretenden Rundungsfehlern.

In der Regel erhält man dann nach Anwendung des Gauß-Algorithmus lediglich den Nullvektor als Lösung für den Eigenvektor. Da der Nullvektor aber ausgeschlossen ist, entpuppt sich das Problem als praktisch unlösbar für die Gleitpunkt-Arithmetik !

In der Praxis werden Eigenwerte und Eigenvektoren mit anderen Verfahren berechnet, z.B. mit dem Algorithmus "**von Mises**" (**Potenzmethode**; nach Richard von Mises) oder mit dem "QR-Algorithmus".

Der Algorithmus "**von Mises**" berechnet den größten Eigenwert λ_{max} von A und den Eigenvektor v :

A sei eine reelle (n, n)-Matrix
Ein Startvektor ev ≠ Nullvektor sei als Eigenvektor vorgegeben
Eine Toleranzgrenze sei EPS, z.B. EPS = 1E-14
Die maximale Zahl der Iterationen sei k_{max}

$$\overrightarrow{ev} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Eigenwert-Algorithmus "von Mises"}$$

$\lambda = 0$ // $\lambda =$ Eigenwert
$k = 0$
wiederhole
$\quad \lambda_0 = \lambda$
$\quad \vec{x} = A \cdot \overrightarrow{ev}$
$\quad \lambda = \vec{x} * \overrightarrow{ev}$ // $*$ = Skalarprodukt
$\quad \overrightarrow{ev} = \vec{x} \,/\, \| \vec{x} \|$ // $\| \ \|$ = Norm/Betrag/Länge des Vektors
$\quad k = k + 1$
bis ($k > k_{max}$) oder ($|\lambda_0 - \lambda| <$ EPS)

Weitere Beispiele mit Lösungen für Eigenwerte, Eigenvektoren :

1.
$$A=\begin{pmatrix}-6 & -5\\ 2 & 1\end{pmatrix} \qquad P_2(\lambda)=\lambda^2+5\lambda+4$$

$$\lambda=-1 \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}; \qquad \lambda=-4 \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}5\\ -2\end{pmatrix}$$

2.
$$A=\begin{pmatrix}-7 & -8\\ 10 & 11\end{pmatrix} \qquad P_2(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+3$$

$$\lambda=1 \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}; \qquad \lambda=3 \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}4\\ -5\end{pmatrix}$$

3.
$$A=\begin{pmatrix}-16 & 15\\ -12 & 11\end{pmatrix} \qquad P_2(\lambda)=\lambda^2+5\lambda+4$$

$$\lambda=-1 \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}; \qquad \lambda=-4 \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}5\\ 4\end{pmatrix}$$

4.
$$A=\begin{pmatrix}9 & 0 & 3\\ 10 & -1 & 2\\ -24 & 0 & -9\end{pmatrix} \qquad P_3(\lambda)=-\lambda^3-\lambda^2+9\lambda+9$$

$$\lambda=-1 \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}; \qquad \lambda=-3 \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 4\end{pmatrix}; \qquad \lambda=3 \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -4\end{pmatrix}$$

5.
$$A=\begin{pmatrix}37 & 33 & 68\\ 30 & 22 & 50\\ -35 & -29 & -62\end{pmatrix} \qquad P_3(\lambda)=-\lambda^3-3\lambda^2+4\lambda+12$$

$$\lambda=2 \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}; \qquad \lambda=-3 \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}5\\ -4\\ 1\end{pmatrix}; \qquad \lambda=-2 \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\ 5\\ -3\end{pmatrix}$$

6.
$$A=\begin{pmatrix}-175 & -60 & 162\\ 348 & 121 & -321\\ -60 & -20 & 56\end{pmatrix} \qquad P_3(\lambda)=-\lambda^3+2\lambda^2+19\lambda-20$$

$$\lambda=1 \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 4\end{pmatrix}; \qquad \lambda=-4 \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 1\end{pmatrix}; \qquad \lambda=5 \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$$

7.
$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1 & 1\\ 6 & -19 & 2 & -10\\ -17 & 52 & -3 & 27\\ -13 & 47 & -5 & 25\end{pmatrix}\qquad P_4(\lambda)=\lambda^4-6\lambda^3+7\lambda^2+6\lambda-8$$

$$\lambda=1\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix};\qquad \lambda=-1\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix};\qquad \lambda=2\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix};\qquad \lambda=4\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

8.
$$A=\begin{pmatrix}16/7 & 2/7 & -1/7 & 9/7\\ -1/7 & 6/7 & 1/14 & 5/14\\ 0 & -2 & 2 & -1\\ 6/7 & 6/7 & -3/7 & 6/7\end{pmatrix}\qquad P_4(\lambda)=\lambda^4-6\lambda^3+11\lambda^2-6\lambda$$

$$\lambda=0\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-2\end{pmatrix};\qquad \lambda=1\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix};\qquad \lambda=2\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix};\qquad \lambda=3\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

9.
$$A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2 & -8 & 16\\ -3 & 2 & -1 & -3 & 8\\ -16 & -10 & -3 & -32 & 58\\ 1 & 2 & 0 & 3 & -2\\ -2 & 0 & -1 & -4 & 10\end{pmatrix}\qquad P_5(\lambda)=-\lambda^5+10\lambda^4-35\lambda^3+50\lambda^2-24\lambda$$

$$\lambda=0\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\\0\end{pmatrix};\qquad \lambda=1\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\\1\end{pmatrix};\qquad \lambda=2\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\\1\end{pmatrix};\qquad \lambda=3\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\1\\1\end{pmatrix};\qquad \lambda=4\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

2) *Matrixnormen und Konditionszahl für (m,n)-Matrizen :*

1-Norm: (maximale Spaltensumme)

$$\boxed{\|A\|_1 = \max_{sp=1(1)n} \sum_{ze=1}^{m} |a_{ze,sp}|}$$

∞ - Norm: (maximale Zeilensumme)

$$\boxed{\|A\|_\infty = \max_{ze=1(1)m} \sum_{sp=1}^{n} |a_{ze,sp}|}$$

FROBENIUS-Norm:

$$\boxed{\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ze=1}^{m} \left(\sum_{sp=1}^{n} |a_{ze,sp}|^2 \right)}}$$

2-Norm: (**Spektralnorm**)

$$\boxed{\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \sigma_{\max}(A)}$$

$\lambda_{\max}(A^T A)$ = größter Eigenwert von $A^T A$; $\sigma_{\max}(A)$ = größter Singulärwert von A

Für die Eigenwerte λ_i gilt die Bedingung:

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \quad \Leftrightarrow (A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \det(A - \lambda \cdot E) = 0$$

Konditionszahl K:

für quadratische, reguläre Matrizen A gilt: $\boxed{K_p(A) = \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p}$ für $p = 1 ; 2 ; F; \infty$

für singuläre Matrizen gilt speziell: $\boxed{K_p = \infty}$

bei rechteckigen Matrizen verwendet man die Pseudoinverse: $\boxed{K_p(A) = \|A\|_p \cdot \|A^+\|_p}$

speziell für $K_2(A)$ gilt bei quadratischen, regulären Matrizen :

$$K_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A) \cdot \lambda_{\max}(A^T A)^{-1}} \Leftrightarrow K_2(A) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^T A)}{\lambda_{\min}(A^T A)}}$$

Hohe Konditionszahlen (wesentlich größer als 1) sprechen für eine **schlechte "Konditionierung"** der Matrix, d.h. infolge von Rundungsfehlern können die Ergebnisse dramatisch **verfälscht** werden.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Wir bestimmen die 4 Normen und die Konditionszahlen K_1 sowie K_2 von A .

$\| A \|_1 = \max (|2| + |-1| , |10| + |4|) = \max (3 , 14) = \mathbf{14}$

$\| A \|_\infty = \max (|2| + |10| , |-1| + |4|) = \max (12 , 5) = \mathbf{12}$

$\| A \|_F = \sqrt{(2^2 + 10^2 + (-1)^2 + 4^2)} = \sqrt{(121)} = \mathbf{11}$

Für die Berechnung der Spektralnorm $\| A \|_2$ ist ein wesentlich höherer Aufwand erforderlich:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 16 & 116 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $A^T A$ (Ansatz) : det ($A^T A - \lambda \cdot E$) = 0

$$\det \left(\begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 16 & 116 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 16 \\ 16 & 116-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (5-\lambda)(116-\lambda) - 16^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 121 \cdot \lambda + 324 = 0 \Rightarrow \lambda = 60{,}5 \pm \sqrt{3336{,}25} \Rightarrow$$

$$\lambda \min = 60{,}5 - \sqrt{3336{,}25} \approx 2{,}74$$

$$\lambda \max = 60{,}5 + \sqrt{3336{,}25} \approx 118{,}26$$

Also gilt: $\| A \|_2 \approx \mathbf{10{,}87}$

Konditionszahl $K_1(A)$:

Hier fehlt noch die Berechnung von A^{-1} und von der Norm $\| A^{-1} \|_1$.

Ansatz:

$$A^{-1} A = E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a-b & 10a+4b \\ 2c-d & 10c+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 2a-b=1 \\ 10a+4b=0 \\ 2c-d=0 \\ 10c+4d=1 \end{matrix} \right|$$

Die Lösungen sind a = 2/9 b = -5/9 c = 1/18 d = 1/9

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/9 & -5/9 \\ 1/18 & 1/9 \end{pmatrix}$$

Dann ist $\| A^{-1} \|_1 = \max (|2/9| + |1/18| , |-5/9| + |1/9|) = \max (5/18 , 2/3) = \mathbf{2/3}$

Für die Konditionszahl ergibt sich: $K_1(A) = 14 \cdot 2 / 3 = 28 / 3 \approx 9{,}33$

Konditionszahl $K_2(A)$:

$$K_2(A) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^T A)}{\lambda_{\min}(A^T A)}} = \sqrt{\frac{60{,}5 + \sqrt{3336{,}25}}{60{,}5 - \sqrt{3336{,}25}}} \approx \underline{6{,}57}$$

Demnach ist die vorgegebene Matrix A (noch) gut konditioniert !