Matrizengleichungen lösen

Ac 2020

Zwei Matrizen A und B seien geeignet vorgegeben.

Gesucht ist eine Lösung X der Gleichung $\boxed{A \cdot X = B}$

"Geeignet" bedeutet hierbei, dass die Dimensionen von A und B so vorgegeben sein müssen, dass die Matrixgleichung gemäß der Matrizengesetze überhaupt möglich ist.

Im allgemeinen Fall ist A eine (m, n)-Matrix .

Dann muss B ebenfalls m Zeilen besitzen, weil B sonst nicht das Ergebnis der Multiplikation $A \cdot X$ sein kann. Die Anzahl der Spalten von B ist allerdings frei wählbar, z.B. k Spalten . Dann ist B eine (m, k)-Matrix .

Folgerichtig muss dann X eine (n, k)-Matrix sein ! (m, n) · (n, k) = (m, k)

In der Regel löst man die obige Matrizengleichung, indem man von links mit der inversen Matrix A^{-1} multipliziert, sofern diese Inverse überhaupt existiert:

$$\boxed{A \cdot X = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B}$$

Die Matrizentheorie liefert dazu folgende Erkenntnisse:

- für $m \neq n$ gibt es grundsätzlich keine Inverse A^{-1}
- für $m = n$ müssen 2 Fälle unterschieden werden:
  - die Determinante ist $\neq 0$, dann ist A "regulär" und es existiert die Inverse A^{-1}
  - die Determinante ist = 0, dann ist A "singulär" und es gibt keine Inverse A^{-1}

Eine eindeutige Lösung für X erhält man also nur, wenn $m = n$ und $\det(A) \neq 0$ gelten !
Es handelt sich dann um quadratische und reguläre Matrizen !

Anmerkung:

Wenn die Inverse von A nicht existiert, dann versucht man in der Regel , mit der stets existierenden sog. "Pseudoinversen" A^{+} zu rechnen, was aber nicht immer zum Erfolg führt.

Die "Lösung" $X = A^{+} \cdot A$ muss in jedem Fall durch Ausmultiplizieren von $A \cdot X$ überprüft werden !

Näheres dazu (und zu OCTAVE) siehe weiter unten.

Genauere Untersuchungen der Fälle m = n, m < n, m > n :

Fall I) m = n: Die Matrix A ist dann quadratisch !

Willkürliche Festlegung der Dimensionen: (3, 3) · (3, 2) = (3, 2)

Beispiel 1, dargestellt mit dem sog. FALK-Schema:

$$
\begin{array}{ccc|cc}
 & & X & x_{11} & x_{12} \\
 & & & x_{21} & x_{22} \\
A & & & x_{31} & x_{32} \\
\hline
2 & -1 & 0 & -2 & -2 \\
1 & 1 & 3 & 14 & -1 \\
0 & 2 & 1 & 5 & 6
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccc|cc}
 & & B & -2 & -2 \\
 & & & 14 & -1 \\
A^{-1} & & & 5 & 6 \\
\hline
5/9 & -1/9 & 1/3 & -1 & 1 \\
1/9 & -2/9 & 2/3 & 0 & 4 \\
-2/9 & 4/9 & -1/3 & 5 & -2
\end{array}
\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}
$$

eindeutige Lösung !

Beispiel 2:

$$
\begin{array}{ccc|cc}
 & & X & x_{11} & x_{12} \\
 & & & x_{21} & x_{22} \\
A & & & x_{31} & x_{32} \\
\hline
2 & -1 & 0 & -2 & -2 \\
1 & 1 & 3 & 14 & -1 \\
0 & 2 & 4 & 5 & 6
\end{array}
$$

A ist singulär; es gibt keine Inverse A^{-1} !

Wir untersuchen dieses Beispiel daher mithilfe des Linearen Gleichungssystems (LGS), das sich aus dem FALK-Schema durch ausmultiplizieren ergibt:

$2 \cdot x_{11} - 1 \cdot x_{21} + 0 \cdot x_{31} = -2$
$1 \cdot x_{11} + 1 \cdot x_{21} + 3 \cdot x_{31} = 14$
$0 \cdot x_{11} + 2 \cdot x_{21} + 4 \cdot x_{31} = 5$
$2 \cdot x_{12} - 1 \cdot x_{22} + 0 \cdot x_{32} = -2$ usw.
Insgesamt sind das 6 Gleichungen mit 6 Unbekannten x_{ik} .
Allgemein: m · k Gleichungen mit n · k Unbekannten

Dieses LGS lässt sich verkürzt so schreiben:

$$
\begin{array}{cccccc:c}
\cdot x_{11} & \cdot x_{21} & \cdot x_{31} & \cdot x_{12} & \cdot x_{22} & \cdot x_{32} & \cdot 1 \\
\hline
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 14 \\
0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6
\end{array}
$$

Die gestrichelte Linie ersetzt das Gleichheitszeichen

Das LGS wird nun in die reduzierte Zeilenstufenform (rref) gebracht .

$\cdot x_{11}$	$\cdot x_{21}$	$\cdot x_{31}$	$\cdot x_{12}$	$\cdot x_{22}$	$\cdot x_{32}$	$\cdot 1$
1	0	1	0	0	0	0
0	1	2	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	2	0
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0

In der vorletzten Zeile steht der Widerspruch 0 = 1 !

Wegen des Widerspruchs gibt es keine Lösung für die Matrix X .

Beispiel 3:

		X		
			x_{11}	x_{12}
			x_{21}	x_{22}
A			x_{31}	x_{32}
2	−1	0	3	4
1	1	3	0	−7
0	2	4	−2	−12

A ist aus Beispiel 2 übernommen, also singulär

Das LGS ist:

$\cdot x_{11}$	$\cdot x_{21}$	$\cdot x_{31}$	$\cdot x_{12}$	$\cdot x_{22}$	$\cdot x_{32}$	$\cdot 1$
2	−1	0	0	0	0	3
1	1	3	0	0	0	0
0	2	4	0	0	0	−2
0	0	0	2	−1	0	4
0	0	0	1	1	3	−7
0	0	0	0	2	4	−12

$\Rightarrow$ rref

$\cdot x_{11}$	$\cdot x_{21}$	$\cdot x_{31}$	$\cdot x_{12}$	$\cdot x_{22}$	$\cdot x_{32}$	$\cdot 1$
1	0	1	0	0	0	1
0	1	2	0	0	0	−1
0	0	0	1	0	1	−1
0	0	0	0	1	2	−6
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Hier ergeben sich Abhängigkeiten zwischen den x_{ik} .

Es gelten:
$1 \cdot x_{11} + 1 \cdot x_{31} = 1$
$1 \cdot x_{21} + 2 \cdot x_{31} = -1$
$1 \cdot x_{12} + 1 \cdot x_{32} = -1$
$1 \cdot x_{22} + 2 \cdot x_{32} = -6$

Man kann daher für 4 der Elemente beliebige Werte wählen und dann die restlichen 4 Elemente gemäß der obigen Gleichungen berechnen.

$$\text{Zum Beispiel:} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{usw.}$$

Wegen der Abhängigkeiten der x_{ik} gibt es unendlich viele Lösungen für die Matrix X .

Allgemein gilt für m = n :

Ist A eine (m, n)-Matrix mit m = n , so hat die Gleichung $A \cdot X = B$

- eine eindeutige Lösung $X = A^{-1} \cdot B$, falls A invertierbar ist

- keine Lösung X , falls A nicht invertierbar ist und das LGS widersprüchlich ist

- unendlich viele Lösungen X , falls A nicht invertierbar ist und im LGS Abhängigkeiten der Unbekannten auftreten.

Anmerkung:

Das Programm OCTAVE liefert eine "passende" Lösung für X mittels des Befehls A \ B

Zu Beispiel 1:

```
A=[2 -1 0; 1 1 3; 0 2 1]
A =
          2          -1           0
          1           1           3
          0           2           1

>> B=[-2 -2; 14 -1; 5 6]
B =
         -2          -2
         14          -1
          5           6

>> X=A\B
X =
         -1           1
          0           4
          5          -2
```

Zu Beispiel 2:

```
A=[2 -1 0; 1 1 3; 0 2 4]
A =
          2          -1           0
          1           1           3
          0           2           4

>> B=[-2 -2; 14 -1; 5 6]
B =
         -2          -2
         14          -1
          5           6

>> X=A\B
```

```
warning: matrix singular to machine precision
X =
          *          *
          *          *
          *          *
```

Zu Beispiel 3:

```
A=[2 -1 0; 1 1 3; 0 2 4]
A =
          2         -1          0
          1          1          3
          0          2          4

>> B=[3 4; 0 -7; -2 -12]
B =
          3          4
          0         -7
         -2        -12

>> X=A\B
warning: matrix singular to machine precision
X =
  8681/7367   505/7196
   -110/171    -220/57
    -61/342     -61/57
```

Die Probe zeigt, dass dieses Ergebnis für X nur näherungsweise stimmt, denn für das Produkt A·X ergibt sich auf 10 Nachkommastellen gerundet :

3,0000007938	4,000004876
0,0000003969	-6,999997562
-2	-12

Diese Ungenauigkeiten sind jedoch der Gleitkomma-Arithmetik geschuldet !

Fall II) **m < n:** unterbestimmtes System

Bei einem unterbestimmten System gibt es in der Regel unendlich viele Lösungen.

Willkürliche Festlegung der Dimensionen: (3, 4) · (4, 2) = (3, 2)

Beispiel 4:

$$\begin{array}{cccc|cc}
 & & & & x_{11} & x_{12} \\
 & & & X & x_{21} & x_{22} \\
 & & & & x_{31} & x_{32} \\
 & A & & & x_{41} & x_{42} \\
\hline
7 & 8 & 1 & 3 & 92 & 38 \\
2 & 0 & 0 & 1 & 10 & 2 \\
0 & 7 & 0 & 0 & 49 & 28
\end{array}$$

3·2 = 6 Gleichungen mit 4·2 = 8 Unbekannten x_{ik} !

Aufstellen des LGS und Erzeugen von rref :

$\cdot x_{11}$	$\cdot x_{21}$	$\cdot x_{31}$	$\cdot x_{41}$	$\cdot x_{12}$	$\cdot x_{22}$	$\cdot x_{32}$	$\cdot x_{42}$	$\cdot 1$
7	8	1	3	0	0	0	0	92
2	0	0	1	0	0	0	0	10
0	7	0	0	0	0	0	0	49
0	0	0	0	7	8	1	3	38
0	0	0	0	2	0	0	1	2
0	0	0	0	0	7	0	0	28

$\Rightarrow$ rref

$\cdot x_{11}$	$\cdot x_{21}$	$\cdot x_{31}$	$\cdot x_{41}$	$\cdot x_{12}$	$\cdot x_{22}$	$\cdot x_{32}$	$\cdot x_{42}$	$\cdot 1$
1	0	0	$1/2$	0	0	0	0	5
0	1	0	0	0	0	0	0	7
0	0	1	$-1/2$	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0	0	$1/2$	1
0	0	0	0	0	1	0	0	4
0	0	0	0	0	0	1	$-1/2$	-1

Dies bedeutet, dass Abhängigkeiten zwischen den x_{ik} bestehen, z.B. $x_{11} + 1/2 \cdot x_{41} = 5$.
Nur $x_{21} = 7$ und $x_{22} = 4$ sind festgelegt .

Also gibt es unendlich viele Möglichkeiten für die Matrix X, z.B.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 4 \\ 5 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 4 \\ 6 & -1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{usw.}$$

Allgemein gilt für m < n:

Ist A eine (m, n)-Matrix mit m < n , so hat die Gleichung A·X = B in der Regel unendlich viele Lösungen X.

Anmerkung:

Das Programm OCTAVE liefert eine "passende" Lösung mittels des Befehls A \ B
oder auch mittels pinv(A)*B , was mathematisch $A^{+} \cdot B$ entspricht !

Es wird also die sog. "Pseudoinverse A^{+} verwendet, für die gilt :

$$A \cdot A^{+} \cdot A = A \quad \wedge \quad A^{+} \cdot A \cdot A^{+} = A^{+}$$

Zu Beispiel 4:

```
A=[7 8 1 3;2 0 0 1;0 7 0 0]
A =
   7   8   1   3
   2   0   0   1
   0   7   0   0

>> B=[92 38;10 2;49 28]
B =
   92   38
   10    2
   49   28

>> X=A\B
X =
       13/3         2/3
          7           4
        5/3        -2/3
        4/3         2/3
```

Das Ergebnis ist korrekt, jedoch ein ganz anderes als die beiden oben angegebenen !

Fall III) **m > n:** überbestimmtes System

Bei einem überbestimmten System gibt es in der Regel keine Lösung.

In einigen besonderen Fällen kann es aber eine Lösung geben, wie das folgende (konstruierte) Beispiel zeigen wird.

Willkürliche Festlegung der Dimensionen: (4, 3) · (3, 2) = (4, 2)

Beispiel 5:

$$\begin{array}{rrr|rr} & & X & x_{11} & x_{12} \\ & & & x_{21} & x_{22} \\ A & & & x_{31} & x_{32} \\ \hline 2 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 14 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 6 \\ -2 & 0 & 1 & 7 & -4 \end{array}$$

Aufstellen des LGS mit 8 Gleichungen und 6 Unbekannten und Erzeugen von rref :

$$\begin{array}{rrrrrr|r} \cdot x_{11} & \cdot x_{21} & \cdot x_{31} & \cdot x_{12} & \cdot x_{22} & \cdot x_{32} & \cdot 1 \\ \hline 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -4 \end{array} \quad \underset{\text{rref}}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{rrrrrr|r} \cdot x_{11} & \cdot x_{21} & \cdot x_{31} & \cdot x_{12} & \cdot x_{22} & \cdot x_{32} & \cdot 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

rref liefert hier eine eindeutige Lösung (Anm.: Das Beispiel ist so konstruiert worden !):

Die Lösungsmatrix X ist also:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir verwenden ein abgewandeltes Beispiel Nr. 6 ; ein einziges Element von B wird geändert !

$$\begin{array}{rrr|rr} & & X & x_{11} & x_{12} \\ & & & x_{21} & x_{22} \\ A & & & x_{31} & x_{32} \\ \hline 2 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 14 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 6 \\ -2 & 0 & 1 & 7 & -4 \end{array}$$

Aufstellen des LGS und Erzeugen von rref :

$$\begin{array}{cccccc|c} \cdot x_{11} & \cdot x_{21} & \cdot x_{31} & \cdot x_{12} & \cdot x_{22} & \cdot x_{32} & \cdot 1 \\ \hline 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -4 \end{array} \underset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{array}{cccccc|c} \cdot x_{11} & \cdot x_{21} & \cdot x_{31} & \cdot x_{12} & \cdot x_{22} & \cdot x_{32} & \cdot 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

rref liefert nun wie erwartet einen Widerspruch (0 = 1 in der vorletzten Zeile) :

Es gibt also hier keine Lösung für X, was auch im allgemeinen Fall für m > n zu erwarten ist.

Allgemein gilt für m > n:

Ist A eine (m, n)-Matrix mit m > n , so hat die Gleichung $A \cdot X = B$ i. A. keine Lösung X.

Anmerkung: Auch hier kann wieder das Programm OCTAVE "zu Rate gezogen werden".

Der Befehl A \ B liefert hier überraschenderweise eine (wenn auch falsche) Lösung :

```
>> A\X
ans =
     -35/57           1
     -22/57           4
     293/57          -2
```

Dass diese "Lösung" falsch ist, kann durch die "Probe" $A \cdot X$ nachgewiesen werden:

```
>> A*X
ans =
     -16/19          -2
     274/19          -1
      83/19           6
     121/19          -4
```

Das Produkt liefert nicht die Matrix B, also falsches Ergebnis für X !

Fazit:

Beim OCTAVE-Befehl A \ B ist Vorsicht geboten; nicht immer ist das Ergebnis korrekt !!

Zusatzbetrachtung:

Die "umgekehrte" Matrixgleichung $\boxed{X \cdot A = B}$

lässt sich entsprechend lösen: $\boxed{X \cdot A = B \;\Rightarrow\; X = B \cdot A^{-1}\text{, falls } A^{-1} \text{ existiert !}}$

Der Unterschied liegt hier in den Dimensionen und in der Multiplikation von rechts.

A soll wieder eine (m, n)-Matrix sein; dann gilt: (k, m) · (m, n) = (k, n)

d.h. X ist eine (k, m)-Matrix und B eine (k, n)-Matrix.

Das zum Problem gehörende LGS erzeugt **k · n Gleichungen mit k · m Unbekannten**

Beispiel 7 (m > n):

		A	2	1
			0	-3
X			1	-1
x_{11}	x_{12}	x_{13}	4	5
x_{21}	x_{22}	x_{23}	5	−5
x_{31}	x_{32}	x_{33}	1	−7
x_{41}	x_{42}	x_{43}	−3	−3

Aufstellen des LGS und Erzeugen von rref :

$\cdot x_{11}$	$\cdot x_{12}$	$\cdot x_{13}$	$\cdot x_{21}$	$\cdot x_{22}$	$\cdot x_{23}$	$\cdot x_{31}$	$\cdot x_{32}$	$\cdot x_{33}$	$\cdot x_{41}$	$\cdot x_{42}$	$\cdot x_{43}$	$\cdot 1$
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
1	−3	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
0	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	5
0	0	0	1	−3	−1	0	0	0	0	0	0	−5
0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	−3	−1	0	0	0	−7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	−3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	−3	−1	−3

$\Rightarrow$ rref

$\cdot x_{11}$	$\cdot x_{12}$	$\cdot x_{13}$	$\cdot x_{21}$	$\cdot x_{22}$	$\cdot x_{23}$	$\cdot x_{31}$	$\cdot x_{32}$	$\cdot x_{33}$	$\cdot x_{41}$	$\cdot x_{42}$	$\cdot x_{43}$	$\cdot 1$
1	0	1/2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
0	1	1/2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1
0	0	0	1	0	1/2	0	0	0	0	0	0	5/2
0	0	0	0	1	1/2	0	0	0	0	0	0	5/2
0	0	0	0	0	0	1	0	1/2	0	0	0	1/2
0	0	0	0	0	0	0	1	1/2	0	0	0	5/2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1/2	−3/2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1/2	1/2

Es entsteht kein Widerspruch, aber es gibt Abhängigkeiten zwischen den Unbekannten, z.B. $x_{11} + 1/2 \cdot x_{13} = 2$.

Daher gibt es unendlich viele Lösungen für X .

Eine von unendlich vielen Lösungen : $$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OCTAVE löst dieses Beispiel (richtig) mit X=B*pinv(A)

```
>> X=B*pinv(A)
X =
       11/6        -7/6         1/3
        5/3         5/3         5/3
          0           2           1
       -4/3         2/3        -1/3
```

Übrigens ist hier das System (im Gegensatz zu Fall III) mit m > n (für A) unterbestimmt !

Entsprechend wäre ein System mit m < n überbestimmt (s.u.) !

Beispiel 8 (m = n):

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & A & 2 & -1 & 0 \\ & & & 1 & 1 & 3 \\ X & & & 0 & 2 & 4 \\ \hline x_{11} & x_{12} & x_{13} & 3 & 4 & 2 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 & -7 & 1 \end{array}$$

dies sind 6 Gleichungen für 6 unbekannte x_{ik}
die Matrix A ist singulär !

Aufstellen des LGS und Erzeugen von rref :

$$\begin{array}{cccccc:c} \cdot x_{11} & \cdot x_{12} & \cdot x_{13} & \cdot x_{21} & \cdot x_{22} & \cdot x_{23} & \cdot 1 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{array} \quad \underset{\text{rref}}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{cccccc:c} \cdot x_{11} & \cdot x_{12} & \cdot x_{13} & \cdot x_{21} & \cdot x_{22} & \cdot x_{23} & \cdot 1 \\ \hline 1 & 0 & -2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

In der vorletzten Zeile ist ein Widerspruch (0 = 1); daher gibt es für X keine Lösung !

Hinweis: Die OCTAVE-Anweisung B*pinv(A) liefert eine falsche Lösung !

```
>> X=B*pinv(A)
X =
   0.46552   0.56897   0.44828
   1.15517   0.18966  -0.51724
```

Beispiel 9 (m < n):

X \ A		
	2	1
x_{11}	6	3
x_{21}	1	0
x_{31}	−4	−2
x_{41}	−2	−1

dies sind 8 Gleichungen für 4 unbekannte x_{ik}

die Matrix A ist überbestimmt !

Aufstellen des LGS :

$\cdot x_{11}$	$\cdot x_{21}$	$\cdot x_{31}$	$\cdot x_{41}$	$\cdot 1$
2	0	0	0	6
1	0	0	0	3
0	2	0	0	1
0	1	0	0	0
0	0	2	0	−4
0	0	1	0	−2
0	0	0	2	−2
0	0	0	1	−1

Die Zeilen 3 und 4 enthalten einen Widerspruch (0 = 1),

daher gibt es für X keine Lösung !

OCTAVE liefert auch hier eine falsche Lösung:

```
>> X=B*pinv(A)
X =
   3.00000
   0.40000
  -2.00000
  -1.00000
```

Anmerkung:

Es gibt noch eine sehr elegante Lösungsmöglichkeit für das Problem X·A = B:

$$X \cdot A = B \quad \Rightarrow \quad (X \cdot A)^T = B^T \quad \Rightarrow \quad A^T \cdot X^T = B^T$$

Man bildet A^T und B^T, und bestimmt anschließend X^T gemäß der weiter oben untersuchten 3 Fälle für $A \cdot X = B$.

Die Lösung X ist dann die Transponierte von X^T !

Diese Methode findet z.B. Anwendung bei "JAMA" !