Lösen von Gleichungen 2.Grades (Mitternachts-Formel) Ac 04/05-2022

Wie löst man eine quadratische Gleichung **$ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$** ?

Ein gängiger Lösungsweg ist der folgende:

Aus der gegebenen Gleichung folgt $x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0 \;\Rightarrow\; (x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} = 0 \;\Rightarrow$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = (\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a} \;\Rightarrow\; x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{(\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}} \;\Rightarrow\; x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{(\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}}$$

wir erhalten die sog. "Mitternachtsformel" $\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

Für die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ gibt es jetzt 3 Möglichkeiten:

1. $D = 0$: Lösung ist reell (doppelt) : $x_{1/2} = -\frac{b}{2a}$
2. $D > 0$: Lösungen sind reell : $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
3. $D < 0$: Lösungen sind konjugiert komplex : $x_{1/2} = \frac{-b \pm i \cdot \sqrt{-D}}{2a}$

Dass diese Formeln nicht immer zu zufriedenstellenden Lösungen führen (numerische Instabilität) wird nachfolgend gezeigt !

Die folgenden Beispiele werden mit dem Datentyp "**double**" von Java17 durchgerechnet; es steht so eine Präzision von 16 Stellen zur Verfügung.

Beispiel 1: $3x^2 - 9 \cdot x + 6 = 0$

Theoretisch gilt: $D = 9^2 - 4 \cdot 18 = 9 > 0$

$x = [\,9 \pm \sqrt{(9)}\,] / 6 = (\,9 \pm 3\,) / 6$ Lösungen: $x = 2$ sowie $x = 1$

Was macht der Computer mit seiner **double**-Präzision ??

```
D = 9.0
√(D) = 3.0
(-b+√(D)) = 12.0
(-b-√(D)) = 6.0
(-b+√(D))/(2*a) = 2.0
(-b-√(D))/(2*a) = 1.0
```

Dies sind die korrekten Lösungen !

Beispiel 2 (Problembeispiel): $x^2 - 10^8 \cdot x + 1 = 0$

Theoretisch gilt: $D = 10^{16} - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 9999999999999996 > 0$

Da der Wurzelwert nicht rational ist betrachten wir sehr präzise Näherungen (55 Stellen) :

Auf 55 Stellen genau ist $\sqrt{(9999999999999996)}$ =
99999999,99999997999999999999999979999999999999999959999999

Bilden wir nun $-b - \sqrt{(D)}$, so erhalten wir

$2{,}00000000000000020000000000000004000000000000092148147139 \cdot 10^{-8}$

Wir teilen noch durch 2a = 2 und erhalten die erste Näherungslösung

x1 = 1,0000000000000001000000000000000200000000000046074073569·10^-8 .

Für (-b + √ (D)) / 2a erhalten wir die zweite Näherungslösung

x2 = 99999999,999999989999999999999998999999999999999980000000 .

Was macht der Computer mit seiner **double**-Präzision ??

```
D = 9.999999999999996E15
√(D) = 9.999999999999999E7  (hier müsste 7 stehen)
-b-√(D) = 1.4901161193847656E-8        [-b-√(D)] / (2a) = 7.450580596923828E-9
-b+√(D) = 2.0E8                        [-b+√(D)] / (2a) = 1.0E8
```

Wir sehen, dass insbesondere die nahe bei 0 liegende Lösung sehr ungenau ist ! Die Abweichung beträgt etwa 25% . Die Ungenauigkeit ergibt sich deswegen, weil |b| viel größer ist als |c| ! Dadurch liegt der Wurzelwert nahe bei -b (b ist hier negativ !) und im Zähler des Bruches entsteht näherungsweise -b - (-b) = 0 sowie -b + (-b) = -2b .

Fazit / Tipp: Bei Anwendung der Mitternachtsformel sollte erst die betragsgrößte Nullstelle ermittelt werden ; dann mittels des Satzes von VIETA (**$x_1 \cdot x_2$ = c / a** .) die andere Lösung berechnen; das wäre dann $1 \cdot 10^{-8}$!

Vorsicht: Der Satz von **VIETA** : $x_1 \cdot x_2 = c / a \longrightarrow$ **$x_2 = c / a / x_1$** lässt sich nur dann verwenden, wenn **$x_1 \neq 0$** ! Daher müssen erst die Fälle für x = 0 geklärt werden .

Vorgehensweise bei Verwendung der "Mitternachtsformel" :

$\boxed{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \;;\; \text{mit } a \neq 0 \text{ ist zu lösen:}}$

Sonderfall $b = 0 \wedge c = 0$: Lösungen: $x_{1/2} = 0$

Sonderfall $c \neq 0 \wedge b = 0$: Lösungen: $x_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Sonderfall $c = 0 \wedge b \neq 0$: Lösungen: $x_1 = 0 \;;\; x_2 = -\frac{b}{a}$

Für den restlichen Fall $b \neq 0 \wedge c \neq 0$: Zuerst die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ bestimmen:

1. $D = 0$: Lösung ist reell (doppelt) : $x_{1/2} = -\frac{b}{2a}$
2. $D > 0$: Lösungen sind reell : $x_1 = \frac{-b - \operatorname{sgn}(b) \cdot \sqrt{D}}{2a}$ (betragsgrößte L.) ; $x_2 = \frac{c}{a \cdot x_1}$
3. $D < 0$: Lösungen sind konjugiert komplex : $x_1 = \left(\frac{-b}{2a},\; i \cdot \frac{\sqrt{-D}}{2a}\right) \;;\; x_2 = \left(\frac{-b}{2a},\; -i \cdot \frac{\sqrt{-D}}{2a}\right)$

Für das obige numerisch problematische Beispiel 2) gilt dann (mit "double"-Präzision) :

$$x_1 = \frac{10^8 + \sqrt{10^{16} - 4}}{2} = 1.0E8 \;;\quad x_2 = \frac{1}{x_1} = 1.0E-8$$

Es gibt noch eine weitere (etwas aufwändige Möglichkeit) zur Bestimmung der betragskleinsten Lösung in problematischen Fällen.
Dazu muss die Mitternachtsformel so umgeformt werden, dass der Wurzelterm im Nenner steht:

Aus der Mitternachtsformel: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ folgt

$$x = \frac{(-b \pm \sqrt{b^2-4ac})\cdot(-b \mp \sqrt{b^2-4ac})}{2a\cdot(-b \pm \sqrt{b^2-4ac})} \Rightarrow x = \frac{b^2 - \sqrt{b^2-4ac}^{\,2}}{2a\cdot(-b \pm \sqrt{b^2-4ac})} \Rightarrow$$

$$x = \frac{b^2 - (b^2-4ac)}{2a\cdot(-b \pm \sqrt{b^2-4ac})} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}}$$

Die betragskleinste der beiden Lösungen ist hierbei $\boxed{x = \dfrac{2c}{-b - \operatorname{sgn}(b)\cdot\sqrt{b^2-4ac}}}$

Für die betragskleinste Lösung ergibt sich hier bei double-Präzision der Wert 1.0E-8 !