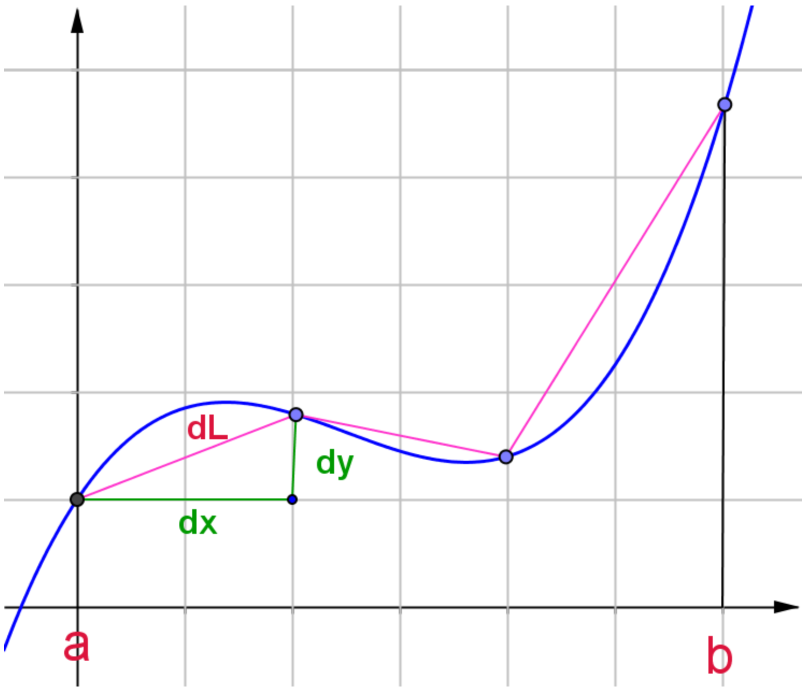
Bogenlängen approximativ berechnen

Ac 2-2017 bis 3-2017

Bogenlängen lassen sich durch Polygonzüge mit n Teilen linear approximieren.
Anmerkung: Eine quadratische Approximation ist möglich, jedoch viel zu aufwendig, da neben der Ermittlung der Parabelgleichung auch noch eine Berechnung der Parabellänge anfällt !



In der Grafik ist n = 3.
Approximiert wird im Intervall [a ; b] .

Satz des Pythagoras :

$dL^2 = dx^2 + dy^2$

Jedes Polygonsegment dL kann daher über eine Wurzel berechnet werden:

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Die Summe aller n Sehnen ist ein Näherungswert für die Bogenlänge BL .
Der Grenzwert dieser Summe (n ⟶ ∞) ist gleich der exakten Bogenlänge BL.

$$BL = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} dL_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{dx_i^2 + dy_i^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

$$\text{Mit} \quad x_i = a + i \cdot dx_i \quad ; \quad dx_i = dx = \frac{b-a}{n} \quad ; \quad y_i = f(x_i) \,\text{folgt:}$$

$$\boxed{BL = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{dx^2 + [f(a+(i+1)\cdot dx) - f(a+i\cdot dx)]^2} \; ; \; dx = \frac{b-a}{n}}$$

Für die konkrete (approximative) Berechnung muss n so groß gewählt werden, dass das Ergebnis eine gewisse Anzahl richtiger Stellen erhält.
Da man nicht weiß, wie groß n zu wählen ist, kann man die Rechnung sukzessive für größer werdende n durchführen (es ist günstig, n jeweils zu verdoppeln) und dann prüfen, wie stark sich 2 aufeinanderfolgende Ergebnisse unterscheiden.
Üblicherweise prüft man bei vorgegebener Schranke ε > 0 , ob **$|(s_{2n} - s_n) / s_{2n}| < \varepsilon$** gilt .
Dies ist eine Abbruchbedingung ! s_n und s_{2n} sind die beiden letzten Ergebnisse .

Vorsicht: ε > 0 darf nicht zu klein gewählt werden, da sonst die Rechenzeit enorm steigt !

Beispiel für ein schon ziemlich klein gewähltes ε (Halbkreis mit Radius 1):

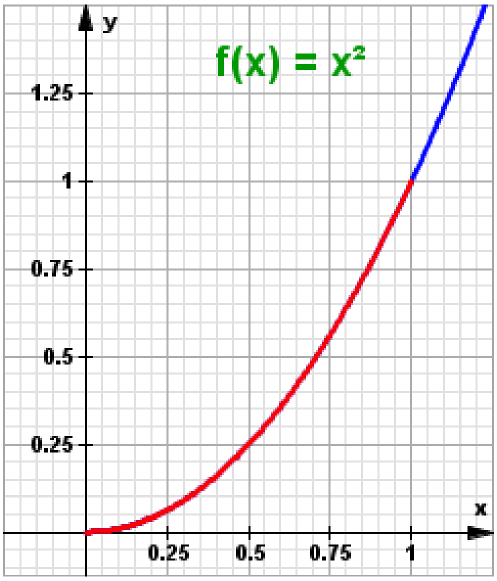
$\varepsilon = 10^{-10}$ s_n = 3.1415926531978844 s_{2n} = 3.141592653483030 (n=1600000)

Hier ist die Abbruchbedingung erfüllt , denn $|(s_{2n} - s_n) / s_{2n}| = 9{,}076466348489 \cdot 10^{-11}$

Java-Programm:

```
public static double bogenLaenge(String sFkt, double a, double t, double b, double eps) {
   // BL = sum(sqrt(dx^2+(f(a+(i+1)*dx)-f(a+i*dx))^2),i,0,n-1)
   double hoe1, hoe2, x, sumAlt, sum, dx, dy, dxquad;
   if (b == a)
      return 0;
   int n = 50000;
   sum = 0;
   do {
      n *= 2;
      sumAlt = sum; // wegen der do-while-Abbruchbedingung
      dx = (b - a) / n;
      dxquad = dx * dx;
      x = a;
      sum = 0;  // eigentliche "Iterations"-Summe

      // linken Rand (x=a) berücksichtigen
      hoe1 = FParser.fxt(sFkt, x, t);
      hoe2 = FParser.fxt(sFkt, x + dx, t);
      dy = hoe2 - hoe1;
      sum += Math.sqrt(dxquad + dy * dy);

      // i = 1 bis i = n-2
      for (int i = 1; i < n - 1; i++) {
         hoe1 = hoe2;
         x += dx;
         hoe2 = FParser.fxt(sFkt, x + dx, t);
         dy = hoe2 - hoe1;
         sum += Math.sqrt(dxquad + dy * dy);
      }

      // jetzt rechten Rand (x=b) berücksichtigen
      hoe1 = FParser.fxt(sFkt, b, t);
      dy = hoe2 - hoe1;
      sum += Math.sqrt(dxquad + dy * dy);

   } while (Math.abs(sum - sumAlt) > Math.abs(eps * sumAlt));
   return sum;
}
```

Beispiele (Approximation mit Java8-Programm) :



In [0 ; 1] hat die Normalparabel eine Länge von

BL ≈ 1.4789428575426726 (12 richtige Stellen)

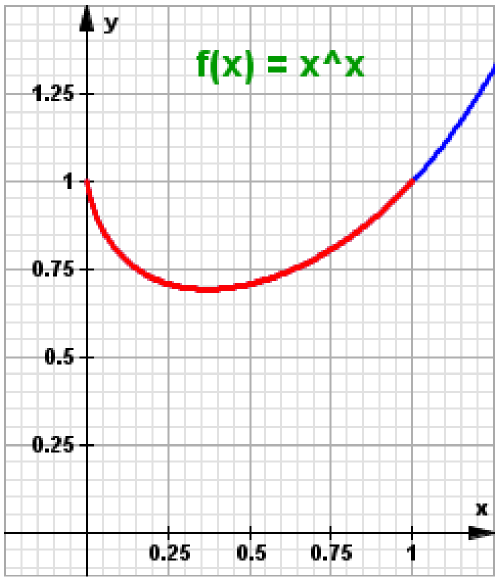
Diese Bogenlänge lässt sich übrigens auch exakt

ermitteln über das Linienintegral $\int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$

Wegen f '(x) = 2x ist dann zu lösen:

$\int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx$

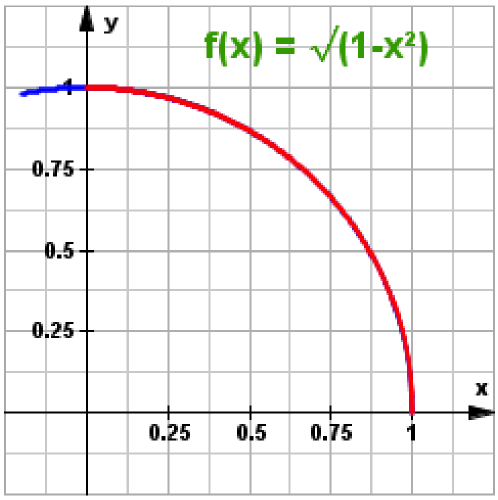
Erstaunlicherweise ist dieses Integral nur mittels komplizierter Substitution zu lösen (s.u.)



In [0 ; 1] hat diese Funktion eine Länge von

BL ≈ 1.247426691197706 (10 richtige Stellen)

Eine genauere Berechnung mittels des oben bereits erwähnten Linienintegrals ergibt den Wert 1.2474266917969339



In [0 ; 1] hat der Einheits-Viertelkreis eine Länge von

BL ≈ 1,5707963262108398 (10 richtige Stellen)

Bekanntlich gilt für den Kreisumfang: U = 2πr .

Demnach hat der Einheits-Viertelkreis exakt die Bogenlänge BL = π / 2 .
Näherung: 1,5707963267948966 1923

Lösung des Integrals zur Berechnung der Länge der Normalparabel:

Man substituiert mit SinusHyperbolicus.

$2x = \sinh(t) = (e^{t} – e^{-t}) / 2$.   Also ist $t = \operatorname{arsinh}(2x)$

Grenzen: $x = 0 \rightarrow t = 0$; $x = 1 \rightarrow t = \operatorname{arsinh}(2) = \ln(2+\sqrt{1+2^2}) = \ln(2+\sqrt{5})$

$dx / dt = d(\sinh(t)/2) / dt = d((e^{t} – e^{-t}) / 4) / dt \rightarrow dx= (e^{t} + e^{-t}) / 4\, dt = \cosh(t) / 2\, dt$

Integrand(Radikand): $1+(2x)^2 = 1+\sinh^2(t) = \cosh^2(t)$, daher

$$\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \cos h^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \left[\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}\right]^2 dt = \frac{1}{8}\int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} (e^{2t}+e^{-2t}+2)\,dt$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}(e^{2t}-e^{-2t})+2t\right]_0^{\ln(2+\sqrt{5})} = \frac{1}{16}(e^{2\ln(2+\sqrt{5})}-e^{-2\ln(2+\sqrt{5})}) + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$$

$$= \frac{1}{16}[(2+\sqrt{5})^2 - \frac{1}{(2+\sqrt{5})^2}] + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5}) = \frac{1}{16}[9+4\sqrt{5} - \frac{1}{9+4\sqrt{5}}] + \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{4}$$

$$= \frac{1}{16}[9+4\sqrt{5} - \frac{9-4\sqrt{5}}{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})}] + \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{4}$$

$$= \frac{1}{16}[9+4\sqrt{5} - \frac{9-4\sqrt{5}}{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})}] + \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{4} = \frac{1}{16}[9+4\sqrt{5} - \frac{9-4\sqrt{5}}{81-80}] + \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{4}$$

$$= \frac{1}{16}8\sqrt{5} + \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{4} = \frac{2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})}{4} \approx 1{,}47894285$$

Auf 25 Stellen genau ist das Ergebnis: **1,478942857544597433827906**

Allgemein erhält man demnach für die Länge BL der Normalparabel im Intervall   [0 ; b]:

$$BL = \int_0^b \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \frac{2b\sqrt{1+(2b)^2} + \ln(2b+\sqrt{1+(2b)^2})}{4}$$