Bogenlängen als Linienintegrale berechnen Ac 2-2017 bis 3-2017

Die Länge eines Funktionsgraphen (Bogenlänge) einer Funktion f über [a ; b] lässt sich als Linienintegral berechnen mit der Formel :

$$\boxed{\text{BL} = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}$$

Dies führt in den meisten Fällen auf sehr komplizierte Integranden, die sich häufig nur näherungsweise berechnen lassen.
Im folgenden werden einige Funktionen betrachtet, bei denen sich die Bogenlänge exakt berechnen lässt. Es wird sich zeigen, dass ausgerechnet bei der „harmlosen" Normalparablel mit $f(x) = x^2$ ein erheblicher Rechenaufwand erforderlich ist.

1) Die Kettenlinie mit **$f(x) = \cosh(x) = 0{,}5\cdot(e^x + e^{-x})$**

Es gilt: $f\,'(x) = 0{,}5\cdot(e^x - e^{-x})$

Daher $1 + f\,'(x)^2 = 1 + 0{,}25\cdot(e^x - e^{-x})^2 = 1 + 0{,}25\cdot(e^{2x} + e^{-2x} - 2) = 0{,}25\cdot(e^{2x} + e^{-2x} + 2) =$

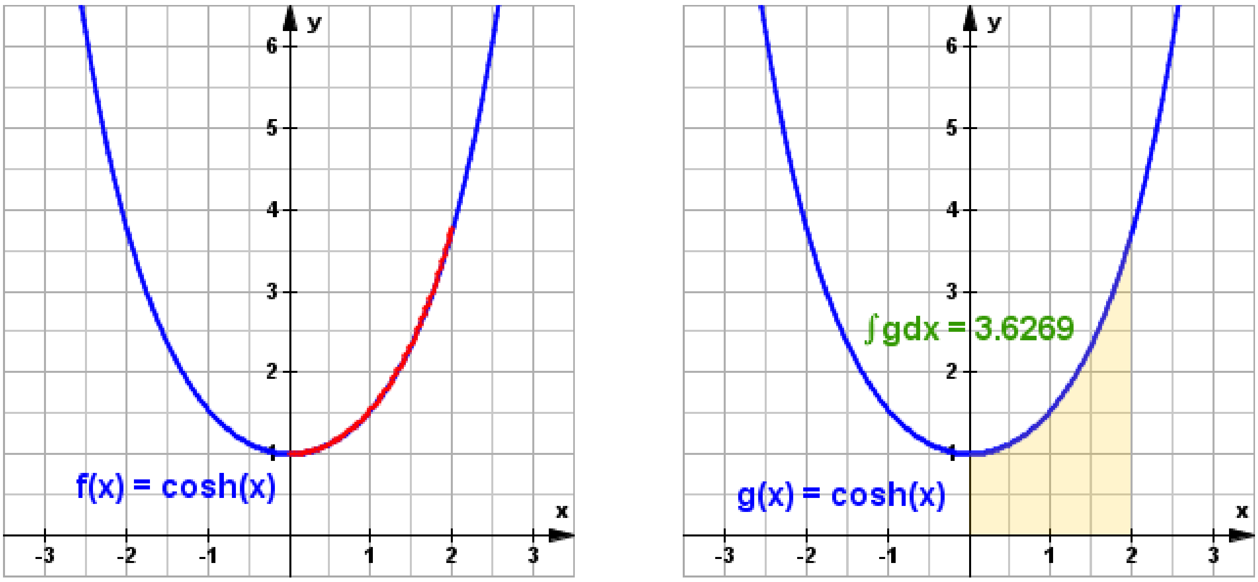
$0{,}5^2\cdot(e^x + e^{-x})^2 = [\, 0{,}5\cdot(e^x + e^{-x}) \,]^2 = \cosh(x)^2 = f(x)^2$

Also ist $\sqrt{1+f'(x)^2} = 0{,}5\cdot(e^x + e^{-x}) = f(x)$!

Für die Bogenlänge im Intervall [0 ; b] ergibt sich:

$$\text{BL} = \int_0^b 0{,}5\cdot(e^x + e^{-x})\, dx = 0{,}5\cdot[\, e^x - e^{-x} \,]_0^b = \mathbf{0{,}5\cdot(e^b - e^{-b})}\ .$$

Die folgende Grafik zeigt den Zusammenhang zwischen der Bogenlänge von f(x) und dem Flächeninhalt zwischen Integrand $g(x) = \sqrt{1+f'(x)^2}$ und x-Achse. Hier ist g = f !



2) Die Neilsche Parabel mit **$f(x)^2 = x^3$**

benannt nach: W.Neil (1637 – 1670)

Wir betrachten nur den Ast oberhalb der y-Achse:

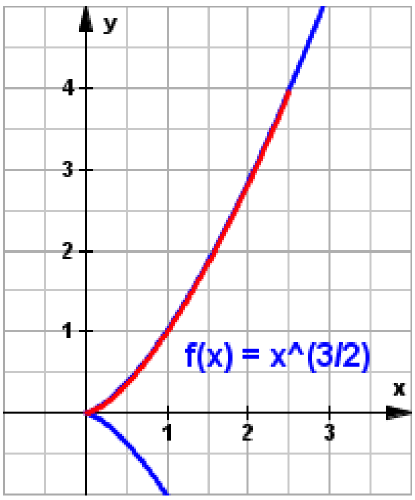
$f(x) = x^{3/2} = x\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3/2 \cdot x^{1/2} \quad \Rightarrow \quad 1 + f'(x)^2 = 1 + 9/4 \cdot x$

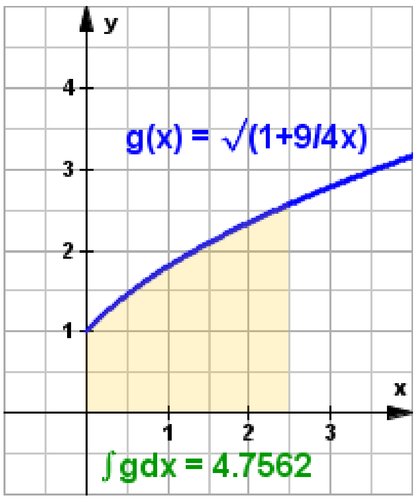
$BL = \int_0^b \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \left[4/9 \cdot 2/3 \cdot ((4 + 9 \cdot x)/4)^{3/2} \right]_0^b = \left[8/27/8 \cdot (4 + 9 \cdot x)^{3/2} \right]_0^b =$

$\left[1/27 \cdot (4 + 9 \cdot x)^{3/2} \right]_0^b = 1/27 \cdot (4 + 9 \cdot b)^{3/2} - 1/27 \cdot 4^{3/2}$

Also **$BL = [(4 + 9 \cdot b)^{3/2} - 8] / 27$**

bzw. $BL = \dfrac{(4+9b)\sqrt{4+9b} - 8}{27}$





3) Der Viertelkreis mit dem Radius r : $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

Es gilt: f '(x) = $-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ und somit $\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

Für die Bogenlänge im Intervall [0 ; r] ergibt sich: BL = $\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$.

Dies ist ein (lösbares) „uneigentliches" Integral mit f(x=r) = ∞ .

Lösung des Integrals mit dem Substitutions-Ansatz: x = r · cos(φ) , d.h. φ = $\arccos\left(\frac{x}{r}\right)$

Es ist dann dx = -r · sin(φ) dφ .

Für die neuen Grenzen erhält man φ = π / 2 und φ = 0 .

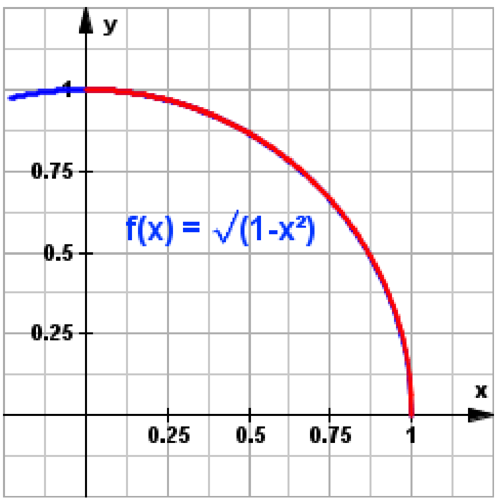
Die Bogenlänge des Halbkreises ist dann:

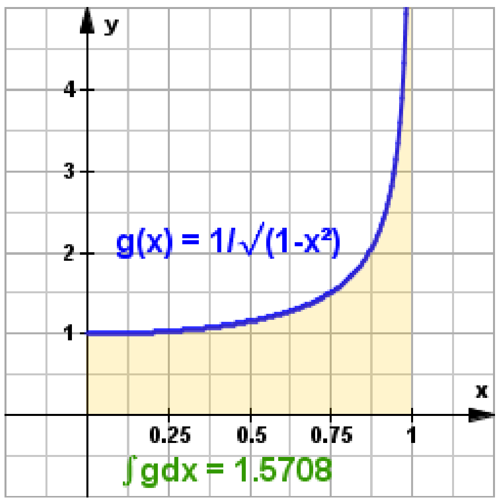
BL = r · $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-r \cdot \sin(\varphi) d\varphi}{\sqrt{r^2 (1 - \cos^2 \varphi)}}$ = r · $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\varphi) d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \varphi}}$ = r · $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi$ = r · $[\,\varphi\,]_0^{\frac{\pi}{2}}$

BL = π / 2 · r , ein bekanntes Ergebnis !

Im übrigen sieht man, dass als Stammfunktion φ herauskommt, was aber gleich $\arccos\left(\frac{x}{r}\right)$ ist !

Die Grafen von Funktion f(x) und Integrand $g(x) = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ (für r = 1) :





4) Die Normalparabel $f(x) = x^2$:

Substitution: $2x = \sinh(t) = (e^t - e^{-t})/2$. Also ist $t = \operatorname{arsinh}(2x)$

Grenzen: $x = 0 \rightarrow \underline{t = 0}$; $x = b \rightarrow t = \operatorname{arsinh}(2b) = \underline{\ln(2b+\sqrt{1+(2b)^2}) = t}$

$dx/dt = d(\sinh(t)/2)/dt = d((e^t - e^{-t})/4)/dt \rightarrow dx = (e^t + e^{-t})/4\, dt = \cosh(t)/2\, dt$

Integrand(Radikand): $1+(2x)^2 = 1+\sinh^2(t) = \cosh^2(t)$

$$\int_0^b \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\ln(2b+\sqrt{1+(2b)^2})} \cos h^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\ln(2b+\sqrt{1+(2b)^2})} \left[\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right]^2 dt$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\ln(2b+\sqrt{1+(2b)^2})} (e^{2t}+e^{-2t}+2)\,dt = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}(e^{2t}-e^{-2t})+2t\right]_0^{\ln(2b+\sqrt{1+(2b)^2})}$$

$$= \frac{1}{16}(e^{2\ln(2b+\sqrt{1+(2b)^2})} - e^{-2\ln(2b+\sqrt{1+(2b)^2})}) + \frac{1}{4}\ln(2b+\sqrt{1+(2b)^2})$$

$$= \frac{1}{16}[(2b+\sqrt{1+4b^2})^2 - \frac{1}{(2b+\sqrt{1+4b^2})^2}] + \frac{1}{4}\ln(2b+\sqrt{1+4b^2})$$

$$= \frac{1}{16}[1+8b^2+4b\sqrt{1+4b^2} - \frac{1}{1+8b^2+4b\sqrt{1+4b^2}}] + \frac{\ln(2b+\sqrt{1+4b^2})}{4}$$

$$= \frac{1}{16}[1+8b^2+4b\sqrt{1+4b^2} - \frac{1+8b^2-4b\sqrt{1+4b^2}}{(1+8b^2+4b\sqrt{1+4b^2})(1+8b^2-4b\sqrt{1+4b^2})}] + \frac{\ln(2b+\sqrt{1+4b^2})}{4}$$

$$= \frac{1}{16}[1+8b^2+4b\sqrt{1+4b^2} - \frac{1+8b^2-4b\sqrt{1+4b^2}}{(1+8b^2)^2-(4b\sqrt{1+4b^2})^2}] + \frac{\ln(2b+\sqrt{1+4b^2})}{4}$$

$$= \frac{1}{16}[1+8b^2+4b\sqrt{1+4b^2} - \frac{1+8b^2-4b\sqrt{1+4b^2}}{1+16b^2+64b^4-16b^2\cdot(1+4b^2)}] + \frac{\ln(2b+\sqrt{1+4b^2})}{4}$$

$$= \frac{1}{16}[1+8b^2+4b\sqrt{1+4b^2} - \frac{1+8b^2-4b\sqrt{1+4b^2}}{1}] + \frac{\ln(2b+\sqrt{1+4b^2})}{4}$$

$$= \frac{1}{16}[8b\sqrt{1+4b^2}] + \frac{\ln(2b+\sqrt{1+4b^2})}{4} = \frac{1}{4}[2b\sqrt{1+4b^2}] + \frac{\ln(2b+\sqrt{1+4b^2})}{4}$$

$$= \frac{2b\sqrt{1+4b^2} + \ln(2b+\sqrt{1+4b^2})}{4}$$