Umwandlung eines Bruches in einen Dezimalbruch

Ac 2013-2020

Jede positive rationale Zahl **$r = z / n$** kann durch Division mit Rest als endliche oder periodische g-adische Reihe (g = Basis des Bruchs) geschrieben werden.
Geht die Division nicht auf, so wiederholt sich spätestens nach (n-1) Stellen hinter dem Komma ein Divisionsrest, d.h. es beginnt eine Periode.

$$\boxed{r = \frac{z}{n} = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_k \overline{b_1 b_2 b_3 \ldots b_j}}$$

wobei a_0 eine natürliche Zahl ist und für die Ziffern a_i , b_i gilt:

$0 \leq a_i < g$ für i von 1 bis k sowie $0 \leq b_i < g$ für i von 1 bis j

1) Bestimmung der Periodenlänge j bzw. der Vorperiodenlänge k (bei gegebenem Bruch z / n):

Regeln (für gekürzte Brüche):

a) Die Anzahl der unperiodischen Kommastellen (Vorperiodenlänge vpLen := k) ist gleich dem Maximum der beiden Anzahlen von 2en bzw. 5en in der Primfaktorzerlegung des Nenners .

b) Die Anzahl der periodischen Kommastellen (Periodenlänge pLen := j) ist die kleinste Zahl x, bei der die Division von 10^x durch den Nenner n den Rest 1 ergibt.

Beispiel für g=10: $p = \frac{7}{88} = 0{,}079\overline{54}$

Bei der Berechnung von vpLen und pLen kommt es nur auf den Nenner n = 88 an .
Primfaktorzerlegung zur Ermittlung von vpLen: $n = 88 = 2^3 \cdot 11$.
5en treten nicht auf , jedoch 3 2en. Daher ist vpLen = 3 .

Zur Berechnung von pLen muss der Nenner n von den Faktoren 2 und 5 befreit werden.
Beim Beispiel $n = 88 = 2^3 \cdot 11$ verbleibt dann der Restnenner $n^* = 11$.
Wir dividieren jetzt sukzessive 10^x durch 11, bis der Rest 1 entsteht :
$10^1 / 11 = 0$ Rest 10
$10^2 / 11 = 9$ Rest **1**
Also ist pLen = 2 .

Weiteres Beispiel: $p = \frac{1}{4100} = 0{,}00\overline{02439}$

$n = 4100 = 2^1 \cdot 5^2 \cdot 41$. Da die 2 1-mal auftritt, jedoch die 5 öfter(2-mal), gilt vpLen=2 .
Wir dividieren nun 10^x durch den von 2en und 5en bereinigten Nenner $n^* = 41$.
$10^1 / 41 = 0$ Rest 10
$10^2 / 41 = 2$ Rest 18
$10^3 / 41 = 24$ Rest 16
$10^4 / 41 = 243$ Rest 37
$10^5 / 41 = 2439$ Rest **1**
Also ist pLen = 5 .

Es genügt übrigens, als Exponent der Zehnerpotenz lediglich die Teilermenge von n^*-1 zu verwenden. Für $n^*=41$ ist so die Teilermenge T40 ($40 = 2^3 \cdot 5$) zu betrachten.
T40 = { 1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 40 }
Daher hätte $10^3 / 41$ nicht unbedingt betrachtet werden müssen.

Man kann sich vorstellen, dass bei sehr langen Perioden (maximal kann die Periodenlänge n*-1 betragen !) große Probleme bei der Division von 10^x / n* auftreten.
Daher ist ein <u>besseres Verfahren</u> zur Bestimmung von pLen erforderlich:
Man erhält das selbe Ergebnis, wenn man nach der ersten Division 10/n* nur den 10-fachen Rest des Ergebnisses durch n* dividiert.
Dies setzt man dann entsprechend weiter fort, bis der Rest 1 ist.
pLen ist dann gleich der Anzahl der durchgeführten Divisionen.

Für das obige Beispiel sieht das so aus:
10^1 / 41 = 0 Rest 10
10·10 / 41 = 2 Rest 18
10·18 / 41 = 4 Rest 16
10·16 / 41 = 3 Rest 37
10·37 / 41 = 9 Rest **<u>1</u>**
Da 5 Divisionen durchgeführt wurden, gilt pLen = 5 .

<u>Algorithmus:</u>
Bestimme die Vorperiodenlänge vpLen sowie die Periodenlänge pLen für den (gekürzten !) Bruch z / n

```
// Gegeben sei  n = Nenner des gekürzten Bruches z / n

// Bestimme zunächst die Vorperiodenlänge vpLen
vp1 = 0   vp2 = 0                  //  vp1, vp2  = Vorperiodenzahlen für Divisoren  '2' bzw. '5'
Solange  n mod 2 = 0  oder  n mod 5 = 0
    falls  n mod 2 = 0
        n = n div 2                // Achtung:  Der Nenner n verändert sich unter Umständen !
        vp1 = vp1 + 1
    sonst //  n mod 5 = 0
        n = n div 5
        vp2 = vp2 + 1
vpLen = max(vp1, vp2)

// Bestimme dann die Periodenlänge pLen
// Anmerkungen:  Zur Begrenzung der Rechenzeit kann optional eine Obergrenze für die
// zu bestimmende Periodenlänge jMin ( immer kleiner als n ) eingerichtet werden.
// ebenso kann eine Obergrenze für den jeweiligen rest eingerichtet werden
jMinGrenze = 1 000 000                      // Beispiel für eine Obergrenze für jMin
restGrenze = Long.MAX_VALUE div 10          // Beispiel für eine Obergrenze für rest (Java)
rest = 1
jMin = 0              // mit jMin wird die Periodenlänge hochgezählt
falls n ≠ 1
    wiederhole
        jMin = jMin + 1
        falls jMin > jMinGrenze
            Ausstieg ("Periode zu lang")
        rest = rest · 10
        falls rest > restGrenze
            Ausstieg ("Ganzzahlüberlauf")
        rest = rest mod n
    bis  rest = 1
pLen = jMin
```

2) Bestimmung der Ziffern a_i bzw. b_i des gesuchten Dezimalbruchs :

Die a_i bzw. b_i werden durch Division von z durch n (Zähler durch Nenner) bestimmt.
Eine Periode wird durch ein vorangestelltes "p" symbolisiert !
Dazu eignet sich der folgende Algorithmus (für g = 10):

```
Algorithmus "Erzeuge Dezimalbruch-Zeichenkette"  für  z / n  mit  | z / n |  ≤ 1

      Achtung:  Vorher (!)  vpLen  und  pLen  bestimmen !!

  Gegeben seien  z und n       // zähler und nenner des (gekürzten) Bruches z / n

  // Anmerkungen:  Zur Begrenzung der Rechenzeit kann optional eine Obergrenze
  // (z.B. 5000) für die Anzahl der Nachkommastellen eingerichtet werden.

  q = 0                         //  q = ganzzahliger Rest der Division
  maxStellen = vpLen + pLen  //  bzw.   maxStellen = min(vpLen+pLen, 5000);
  Notiere "0,"
  rest = z mod n
  für  pos  von 1  bis  maxStellen
      rest = 10·(rest - q·n)
      q = rest div n
      falls vpLen > 0  und  pos = vpLen + 1
          dann  notiere  "p"      //  Periodenbeginn mit "p" anzeigen
      Notiere q
```

<u>Beispiel:</u> $\frac{z}{n} = \frac{47}{71} = 0,\overline{66197183098591549295774647887323943}$

Hier ist vpLen = 0 (keine Vorperiode !) und pLen = 35 (Periode 35-stellig !)

<u>Hinweis:</u>
Der Algorithmus funktioniert auch bei abbrechenden Dezimalbrüchen (dort ist pLen = 0) !

<u>Beispiel:</u> z/n = 7/8 (hier gilt vpLen = 3 und pLen = 0)

notiere 0,
nk = z mod n = 7
i=1: nk = 70 q = 8 notiere 8
i=2: nk = 60 q = 7 notiere 7
i=3: nk = 40 q = 5 notiere 5

Ergebnis: 7/8 = 0,875

Umwandlung eines Dezimalbruches in einen Bruch Ac 2013-2020

Jede „g-adische Entwicklung" (für g=10: Dezimalbruchentwicklung) stellt eine rationale Zahl r dar und kann als Bruch z / n geschrieben werden. Für den Spezialfall | z / n | ≤ 1 gilt:

$$\boxed{r = 0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots a_k \overline{b_1 b_2 b_3 \ldots b_j}}$$

Daraus ergibt sich als Summenformel für den Bruch m/n = p:

$$\boxed{\frac{z}{n} = \frac{(g^j - 1) \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i g^{k-i} + \sum_{i=1}^{j} b_i g^{j-i}}{(g^j - 1) \cdot g^k}}$$

<u>Hierbei bedeuten bzw. gelten:</u> (g = Basis der g-adischen Entwicklung)

$0 \leq a_i < g$ für i von 1 bis k

$0 \leq b_i < g$ für i von 1 bis j

<u>Beispiel</u> für Basis g = 10 (k=2 und j=2): $r = 0{,}67\overline{21} = \frac{z}{n}$

Dann gilt nach obiger Summenformel

$$\frac{z}{n} = \frac{(10^2 - 1) \cdot (6 \cdot 10^{2-1} + 7 \cdot 10^{2-2}) + 2 \cdot 10^{2-1} + 1 \cdot 10^{2-2}}{(10^2 - 1) \cdot 10^2} = \frac{99 \cdot 67 + 21}{99 \cdot 100} = \frac{6654}{9900} = \frac{1109}{1650}$$

<u>Hieraus leitet sich für das Zehnersystem (g=10) eine einfache REGEL ab:</u>

$$\boxed{r = 0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots a_k \overline{b_1 b_2 b_3 \ldots b_j} = \frac{a_1 a_2 a_3 \ldots a_k b_1 b_2 b_3 \ldots b_j - a_1 a_2 a_3 \ldots a_k}{(10^j - 1) \cdot 10^k} = \frac{z}{n}}$$

<u>Regel für Dezimalbruch ohne Periode</u> (abbrechender Dezimalbruch):

Der Zähler des gesuchten Bruches ist gleich dem Nachkommateil .
Der Nenner ist gleich 10^k (1 mit k Nullen), wobei k die Anzahl der Nachkommastellen ist .

<u>Regel für Dezimalbruch mit Periode:</u>

Der Zähler des gesuchten Bruches ergibt sich durch Subtraktion des nichtperiodischen Nachkommateils vom gesamten Nachkommateil, <u>ohne Periode notiert</u> .
Gibt es keinen nichtperiodischen Teil, so ist der Zähler gleich dem periodischen Teil .

In den Nenner schreibt man so viele Neunen, wie der periodische Teil Stellen hat und ergänzt die so erhaltene Zahl um so viele Nullen, wie der nichtperiodische Teil Stellen hat !
Gibt es keinen nichtperiodischen Teil, so lässt man die Nullen weg ! .

Dies sei an weiteren Beispielen demonstriert:

1) $0{,}95537 = \frac{95537}{100000}$

2) $0{,}\overline{36} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$

3) $0{,}\overline{875} = \frac{875}{999}$

4) $0{,}10\overline{703} = \frac{10703-10}{99900} = \frac{10693}{99900} = \frac{289}{2700}$

5) $0{,}08\overline{05013} = \frac{805013-8}{9999900} = \frac{805005}{9999900} = \frac{17889}{222220}$

6) $0{,}9553\overline{571428} = \frac{9553571428-9553}{9999990000} = \frac{9553561875}{9999990000} = \frac{107}{112}$