

Die kubische Gleichung $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$; $a \neq 0$ ist zu lösen .

Division durch a führt auf das normierte Polynom $p_1(x) = x^3 + b/ax^2 + c/ax + d/a$

bzw. $p_1(x) = x^3 + rx^2 + sx + t$ mit $r=b/a$ $s=c/a$ $t=d/a$

Anschließend führt man wegen Wendepunkteigenschaften $p_1(x)$ auf $p_2(x) = x^3 - px - q$ zurück.
Wie hängen die beiden Darstellungen zusammen ?

Jede ganzrationale Funktion 3. Grades hat genau eine Wendestelle !

$p_1(x)$ hat seine Wendestelle bei $x = -r/3$ und $p_2(x)$ hat seine Wendestelle bei $x = 0$

Man muss demnach $p_1(x)$ so verschieben, dass die Wendestelle bei $x = 0$ liegt .

Dies geschieht durch die Transformation $x \rightarrow x + r/3$ bzw. $y = x + r/3$ bzw. $x = y - r/3$

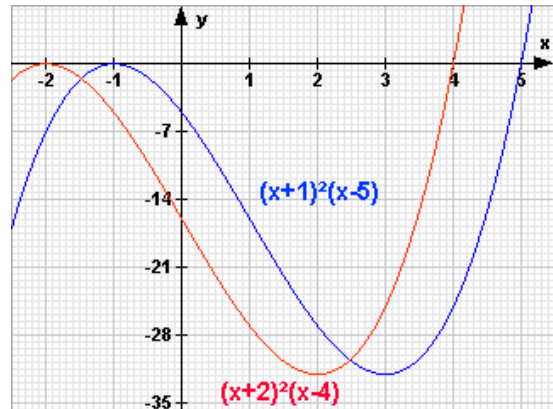
Beispiel:

$$p_1(x) = (x+1)^2(x-5) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$$

(Wendepunkt bei $x=1$)

$$p_2(x) = (x+2)^2(x-4) = x^3 - 12x - 16$$

(Wendepunkt bei $x=0$)



Allgemeine Rechnung mit $x = y - r/3$:

$$p_2(y) = (y-r/3)^3 + r(y-r/3)^2 + s(y-r/3) + t = y^3 - ry^2 + r^2/3y - r^3/27 + ry^2 - 2r^2/3y + r^3/9 + sy - rs/3 + t$$

$$= y^3 + (s-r^2/3)y + t-rs/3+2r^3/27$$

Wir erhalten $p_2(y) = y^3 + py + q$ mit $y = x + r/3$ $p = s - r^2/3$ und $q = t - rs/3 + 2r^3/27$

Wir substituieren $y = u + v$.

Zu lösen ist dann: $y^3 + py + q = (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$ bzw. $u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0$ bzw. $u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0$ bzw. $u^3 + v^3 + (3uv+p)(u+v) + q = 0$

Dies ist eine Gleichung mit den zwei zu bestimmenden Variablen u und v .

Es fehlt zur Bestimmung von u und v aber noch eine zweite Bedingung.

Diese wird so gewählt, dass der Faktor $3uv+p$ gerade 0 wird. $3uv = -p$ und $u^3 + v^3 = -q$

Zur Lösung dieses System quadriert man $u^3 + v^3 = -q$ und erhält $u^6 + v^6 + 2u^3v^3 = q^2$ (1)

Die Gleichung $uv = -p/3$ potenziert man mit 3 und multipliziert mit 4: $4u^3v^3 = -4(p/3)^3$

Das Ergebnis wird von der ersten Gleichung (1) subtrahiert: $u^6 + v^6 - 2u^3v^3 = q^2 + 4(p/3)^3$

Umgeformt erhält man $(u^3 - v^3)^2 = q^2 + 4(p/3)^3$

Wurzelziehen liefert $u^3 - v^3 = \pm \sqrt{q^2 + 4(p/3)^3}$ Außerdem noch (von oben) $u^3 + v^3 = -q$

Addiert man beide Gleichungen, so ergibt sich $2u^3 = -q \pm \sqrt{q^2 + 4(p/3)^3}$

Subtrahiert man beide Gleichungen, so ergibt sich $2v^3 = -q \mp \sqrt{q^2 + 4(p/3)^3}$

Vereinfacht: $u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ $v^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$

Wegen der Identität der beiden Formeln genügt es , jeweils nur eine Lösung der beiden Lösungspaare

zu betrachten, etwa $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ und $v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$

Da der Term unter der Wurzel (Diskriminante D) auch negativ werden kann, hat man es hier mit komplexen 3. Wurzeln u und v zu tun. Diese müssen so gewählt werden, dass die Nebenbedingung $u \cdot v = -p/3$ erfüllt ist.

Konkret: Für die Lösungen von $u^3 = z$ gilt die „De Moivresche Formel“ :

$$u_k = \sqrt[3]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{3}\right) \right] ; k = 0, 1, 2 ; \tan(\varphi) = \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}$$

Für u gilt : $z = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ bzw. $z = -\frac{q}{2} + \sqrt{D}$ mit Diskriminante $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$.

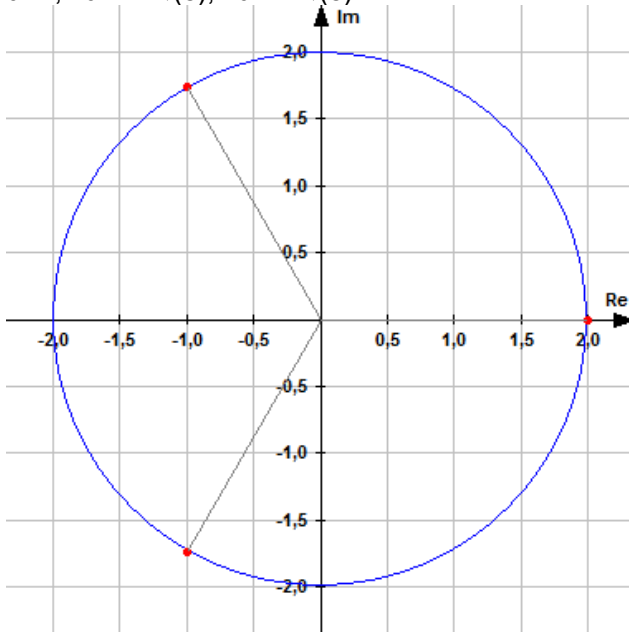
Demgegenüber gilt für v : $z^* = -\frac{q}{2} - \sqrt{D}$

Fall: $D \geq 0$

Ist die Diskriminante $D \geq 0$, so ist auch der Imaginärteil von z gleich 0 . Also $\tan(\varphi) = 0$.
Für den Winkel bleiben dann nur die Werte $\varphi=0$ ($z>0$) oder $\varphi=\pi$ ($z<0$) ; siehe Grafikbeispiele.

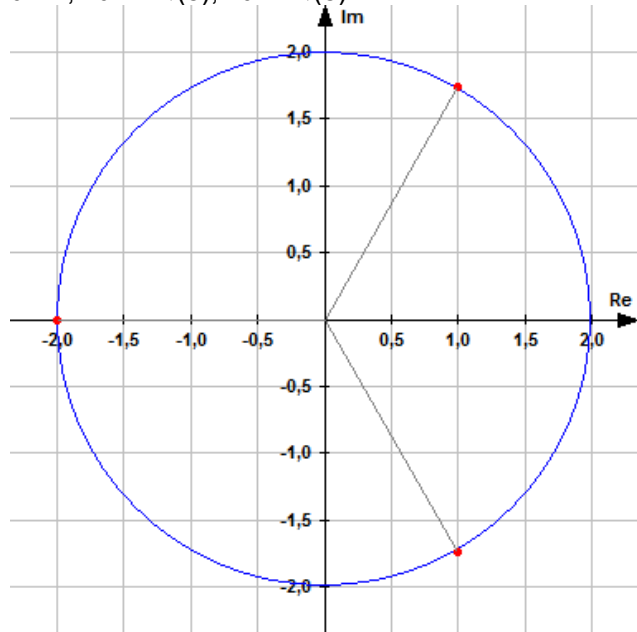
Lösungen für $u^3 = 8$

$u=2$; $u=-1+\sqrt[3]{3}$; $u=-1-\sqrt[3]{3}$



Lösungen für $u^3 = -8$

$u=-2$; $u=1+\sqrt[3]{3}$; $u=1-\sqrt[3]{3}$



Die Lösungen für u sind dann : $u_k = \sqrt[3]{z} \cdot \left[\cos\left(\frac{k \cdot 2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{k \cdot 2\pi}{3}\right) \right] ; k = 0, 1, 2$

Dies bedeutet : $u_0 = \sqrt[3]{z}$ $u_1 = \sqrt[3]{z} \cdot (-0,5 + i \cdot 0,5 \cdot \sqrt{3}) = 0,5 \cdot \sqrt[3]{z} \cdot (-1 + i \cdot \sqrt{3})$

$$u_2 = \sqrt[3]{z} \cdot (-0,5 - i \cdot 0,5 \cdot \sqrt{3}) = 0,5 \cdot \sqrt[3]{z} \cdot (-1 - i \cdot \sqrt{3})$$

Die Lösungen für v sind ebenso wie die für u, allerdings mit z^* statt z .

Außerdem muss man bei der Kombination $y = u+v$ die Nebenbedingung $uv = -p/3$ beachten :

Zu $u_1 = 0,5 \cdot \sqrt[3]{z} \cdot (-1 + i \cdot \sqrt{3})$ passt nicht $v_1 = 0,5 \cdot \sqrt[3]{z^*} \cdot (-1 + i \cdot \sqrt{3})$, weil das Produkt $u_1 v_1$ nicht reell ist. Wählt man aber $v_1 = 0,5 \cdot \sqrt[3]{z^*} \cdot (-1 - i \cdot \sqrt{3})$, so gilt $u_1 \cdot v_1 = \sqrt[3]{zz^*} = u \cdot v = -\frac{p}{3}$.

Ebenso findet man zu $u_2 = 0,5 \cdot \sqrt[3]{z} \cdot (-1 - i \cdot \sqrt{3})$ die passende Lösung $v_2 = 0,5 \cdot \sqrt[3]{z^*} \cdot (-1 + i \cdot \sqrt{3})$.

Für $y = u+v$ findet man: $y_1 = u_0 + v_0 = \sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{z^*}$. Dies führt auf folgende bekannte Formel :

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{Cardanische Formel (TARTAGLIA)}$$

$$y_2 = u_1 + v_1 = 0,5 \cdot \sqrt[3]{z} \cdot (-1 + i \cdot \sqrt{3}) + 0,5 \cdot \sqrt[3]{z^*} \cdot (-1 - i \cdot \sqrt{3}) \quad \text{sowie}$$

$$y_3 = u_2 + v_2 = 0,5 \cdot \sqrt[3]{z} \cdot (-1 - i \cdot \sqrt{3}) + 0,5 \cdot \sqrt[3]{z^*} \cdot (-1 + i \cdot \sqrt{3})$$

Unter Verwendung von $u (=u_0)$ und $v(=v_0)$ lassen sich diese beiden Formeln übersichtlicher notieren:

$$y_2 = 0,5 \cdot u \cdot (-1 + i \cdot \sqrt{3}) + 0,5 \cdot v \cdot (-1 - i \cdot \sqrt{3}) \quad \text{bzw.} \quad \boxed{y_2 = -(u+v)/2 + (u-v)/2 \cdot i \cdot \sqrt{3}}$$

$$y_3 = 0,5 \cdot u \cdot (-1 - i \cdot \sqrt{3}) + 0,5 \cdot v \cdot (-1 + i \cdot \sqrt{3}) \quad \text{bzw.} \quad \boxed{y_3 = -(u+v)/2 - (u-v)/2 \cdot i \cdot \sqrt{3}}$$

Recht einfach ermittelt man y für den Spezialfall

Fall: $D=0$

Es ist dann $u = v = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ und somit bekommt man ausschließlich reelle Lösungen !

$$\boxed{y_1 = -2 \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{2}}}$$

$$\boxed{y_2 = y_3 = -u = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}}$$

Fall: $D < 0$

Der Fall $D < 0$ ist der schwierigste, denn bereits z und z^* sind (konjugiert) komplex . Weil die Lösung im 15. und 16. Jahrhundert nicht zu bewältigen war, nannte man ihn **casus irreducibilis** .

Die Auflösung gelingt auf trigonometrischem Wege (de Moivre) .

Überraschenderweise sind alle Lösungen reell !

Zusammenfassung CARDANO:

Gegeben sind die Koeffizienten: a, b, c, d (a darf nicht 0 sein !)

Folgende Berechnungen sind durchzuführen:

$$\begin{aligned} r &= b/a & s &= c/a & t &= d/a \\ p &= s - r^2/3 & q &= t - rs/3 + 2r^3/27 \\ D &= (q/2)^2 + (p/3)^3 \end{aligned}$$

1.Fall: $D \geq 0$

$D = 0$: 3 reelle Lösungen, davon mindestens 2 übereinstimmende
 $D > 0$: 1 reelle und 2 komplexe Lösungen

Wir bilden
$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

$$x_1 = u + v - \frac{r}{3}$$

Die Lösungen sind:

$$x_2 = -\frac{u+v}{2} - \frac{r}{3} + i \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{u-v}{2}$$
$$x_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{r}{3} - i \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{u-v}{2}$$

2.Fall: $D < 0$

„Causus irreducibilis“ ; 3 reelle Lösungen

Wir bilden
$$w = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \phi = \arccos\left(-\frac{q}{2w}\right)$$

$$x_1 = 2 \cdot \sqrt[3]{w} \cdot \cos\left(\frac{\phi}{3}\right) - \frac{r}{3}$$

Die Lösungen sind:

$$x_2 = 2 \cdot \sqrt[3]{w} \cdot \cos\left(\frac{\phi + 2\pi}{3}\right) - \frac{r}{3}$$
$$x_3 = 2 \cdot \sqrt[3]{w} \cdot \cos\left(\frac{\phi + 4\pi}{3}\right) - \frac{r}{3}$$

JAVA-Programm CARDANO (Console):

```
public static double[] reduzierteForm(double a, double b, double c, double d) {
    // liefert  $y^3 + p*y + q = 0$ , also p und q, sowie diskriminante und r
    double r, s, t, p, q, diskrim;
    r = b / a;
    s = c / a;
    t = d / a;
    p = s - r * r / 3;
    // System.out.println("p=" + p);
    q = 2 * r * r * r / 27 - s * r / 3 + t;
    // System.out.println("q=" + q);
    diskrim = p * p * p / 27 + q * q / 4;
    // System.out.println("diskrim=" + diskrim);
    return new double[] {p, q, r, diskrim};
}

public static double[] zwei_komplexe_Loesungen(double diskrim, double q, double r) {
    double u, v, x1, re, im;
    u = Math.cbrt(Math.sqrt(Math.abs(diskrim)) - q / 2);
    v = Math.cbrt(-Math.sqrt(Math.abs(diskrim)) - q / 2);
    x1 = u + v - r / 3;
    re = -(u + v) / 2 - r / 3;
    im = Math.sqrt(3) * (u - v) / 2;
    return new double[] {x1, re, im};
}

public static double[] casus_irreduzibilis(double p, double q, double r) {
    double w, w2, phi, x1, x2, x3;
    w = Math.sqrt(-p * p * p / 27);
    w2 = 2 * Math.cbrt(w);
    phi = Math.acos(-q / 2 / w);
    x1 = w2 * Math.cos(phi / 3) - r / 3;
    x2 = w2 * Math.cos(phi / 3 + 2 * Math.PI / 3) - r / 3;
    x3 = w2 * Math.cos(phi / 3 + 4 * Math.PI / 3) - r / 3;
    return new double[] {x1, x2, x3};
}

public static double[] kubGleichung(double a, double b, double c, double d) {
    // Lösen von  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  nach CARDANO
    if (a == 0)
        throw new IllegalArgumentException(" a darf nicht 0 sein !");

    double r, p, q, diskrim, x1, x2, x3;
    double[] loes;
    double [] reduzF = reduzierteForm(a, b, c, d);
    p = reduzF[0];
    q = reduzF[1];
    r = reduzF[2];
    diskrim = reduzF[3];

    if (istNull(diskrim)) { // Diskriminante = 0
        if (p == 0) { // 3-fache reelle Lösung
            x1 = -r/3;
            x2 = x3 = x1;
        } else { // 3 reelle lösungen (2 übereinstimmend)
            loes = zwei_komplexe_Loesungen(diskrim, q, r); // Imaginärteil ist hier = 0
            x1 = loes[0];
            x2 = x3 = loes[1]; // loes[2] = 0 ist Imaginärteil !
        }
    }
    else if (istPositiv(diskrim)) {
        loes = zwei_komplexe_Loesungen(diskrim, q, r);
        x1 = loes[0];
        x2 = loes[1]; // re
        x3 = loes[2]; // im
        return new double[] {x1, x2, x3, 0}; // 0 bedeutet "2 konj. komplexe Lös."
    }
}
```

```

} else {
    loes = casus_irreduzibilis(p, q, r); // Diskriminante < 0; 3 reelle Lös.
    x1 = loes[0];
    x2 = loes[1];
    x3 = loes[2];
}

return new double[] {x1, x2, x3};
}

```

Durchgerechnete Beispiele:

0) $x^3 + 6x - 20$ (Cardano)	Lös.:	2	-1-3i	-1+3i
1) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$	Lös.:	1	1	1
2) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	Lös.:	1	2	3
3) $x^3 - 1x^2 + 1x - 1$	Lös.:	1	-i	i
4) $x^3 - 15x - 126$	Lös.:	6	-3 - i·3.4641016151377544	-3 + i·3.4641016151377544
5) $x^3 - 2x^2 - 1x + 2$	Lös.:	1	-1	2
6) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$	Lös.:	1	1	2
7) $x^3 - 9x^2 + 33x - 65$	Lös.:	5	2-3i	2+3i
8) $x^3 - 981x - 11340$	Lös.:	36	-21	-15
9) $x^3 + x + 1$	Lös.:	-0.6823278038280194	0.3411639019140097 - i·1.1615413999972518	0.3411639019140097 + i·1.1615413999972518
10) $3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$	Lös.:	2	-1	0,3333333333333333