Lösen von Gleichungen 3.Grades (Cardano-Formel)   Ac 2018-2022

Die kubische Gleichung **$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$; $a \neq 0$** ist zu lösen .

Division durch a führt auf das normierte Polynom $p1(x) = x^3 + b/ax^2 + c/ax + d/a$

bzw. $p1(x) = x^3 + rx^2 + sx + t$ mit $\underline{r=b/a \quad s=c/a \quad t=d/a}$

Anschließend führt man wegen Wendepunktseigenschaften $p1(x)$ auf $p2(x) = x^3 - px - q$ zurück. Wie hängen die beiden Darstellungen zusammen ?

Jede ganzrationale Funktion 3. Grades hat genau eine Wendestelle !
$p1(x)$ hat seine Wendestelle bei $x = -r/3$ und $p2(x)$ hat seine Wendestelle bei $x = 0$

Man muss demnach $p1(x)$ so verschieben, dass die Wendestelle bei $x = 0$ liegt .
Dies geschieht durch die Transformation $x \rightarrow x + r / 3$ bzw. $\underline{y = x + r / 3}$ bzw. $x = y - r / 3$

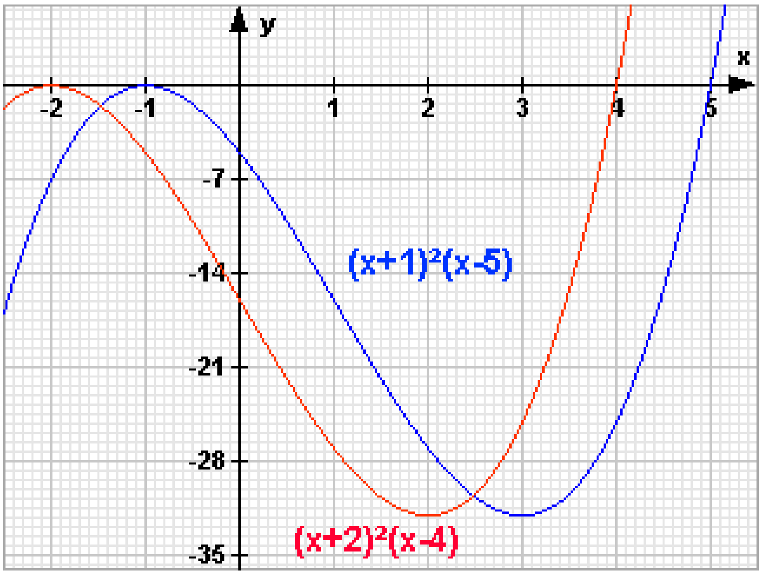
<u>Beispiel:</u>

$p1(x) = (x+1)^2(x-5) = x^3-3x^2-9x-5$

(Wendepunkt bei x=1)

$p2(x) = (x+2)^2(x-4) = x^3-12x-16$

(Wendepunkt bei x=0)



Allgemeine Rechnung mit $x = y - r/3$:

$p2(y) = (y - r/3)^3 + r(y - r/3)^2 + s(y - r/3) + t = y^3 - ry^2 + r^2/3y - r^3/27 + ry^2 -2r^2/3y + r^3/9 + sy - rs/3 + t$

$= y^3 + (s -r^2/3)y + t - rs/3 + 2r^3/27$

Wir erhalten $\underline{p2(y) = y^3 + py + q}$ mit $\underline{y = x + r/3}$ $\underline{p = s - r^2/3}$ und $\underline{q = t - rs/3 + 2r^3/27}$

Wir substituieren $\underline{\mathbf{y = u + v}}$.

Zu lösen ist dann:
$y^3 + py + q = (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$ bzw. $u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0$ bzw.
$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0$ bzw. $u^3 + v^3 + (3uv+p)(u+v) + q = 0$

Dies ist eine Gleichung mit den zwei zu bestimmenden Variablen u und v .
Es fehlt zur Bestimmung von u und v aber noch eine zweite Bedingung.
Diese wird so gewählt, dass der Faktor $3uv+p$ gerade 0 wird. **$3uv = -p$ und $u^3 + v^3 = -q$**

Zur Lösung dieses System quadriert man $u^3 + v^3 = -q$ und erhält $u^6 + v^6 + 2u^3v^3 = q^2$ (*)
Die Gleichung $uv = -p/3$ potenziert man mit 3 und multipliziert mit 4: $4u^3v^3 = -4(p/3)^3$

Das Ergebnis wird von der ersten Gleichung (*) subtrahiert: $u^6 + v^6 - 2u^3v^3 = q^2 + 4(p/3)^3$
Umgeformt erhält man $(u^3 - v^3)^2 = q^2 + 4(p/3)^3$
Wurzelziehen liefert $u^3 - v^3 = \pm\sqrt{(q^2 + 4(p/3)^3)}$
Außerdem noch (von oben) $u^3 + v^3 = -q$

Addiert man beide Gleichungen, so ergibt sich $2u^3 = -q \pm \sqrt{(q^2 + 4(p/3)^3)}$

Subtrahiert man beide Gleichungen, so ergibt sich $2v^3 = -q \mp \sqrt{(q^2 + 4(p/3)^3)}$

Vereinfacht: $u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}$ $\quad v^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}$

Wegen der Identität der beiden Formeln genügt es , jeweils nur eine Lösung der beiden

Lösungspaare zu betrachten, etwa $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}$ und $v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}$

Da der Term unter der Wurzel (Diskriminante D) auch <u>negativ</u> werden <u>kann</u>, hat man es hier mit komplexen 3. Wurzeln u und v zu tun.

Diese müssen so gewählt werden, dass die Nebenbedingung $u \cdot v = -p/3$ erfüllt ist.

<u>Konkret:</u> Für die Lösungen von $u^3 = z$ gilt die „<u>De Moivresche Formel</u>“ :

$$\boxed{u_k = \sqrt[3]{|z|} \cdot [\cos(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{3})] \;; k = 0,1,2 \;\; ; \;\; \tan(\varphi) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}}$$

Für u gilt : $z = -\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}$ bzw. $z = -\frac{q}{2} + \sqrt{D}$ mit Diskriminante $D = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$.

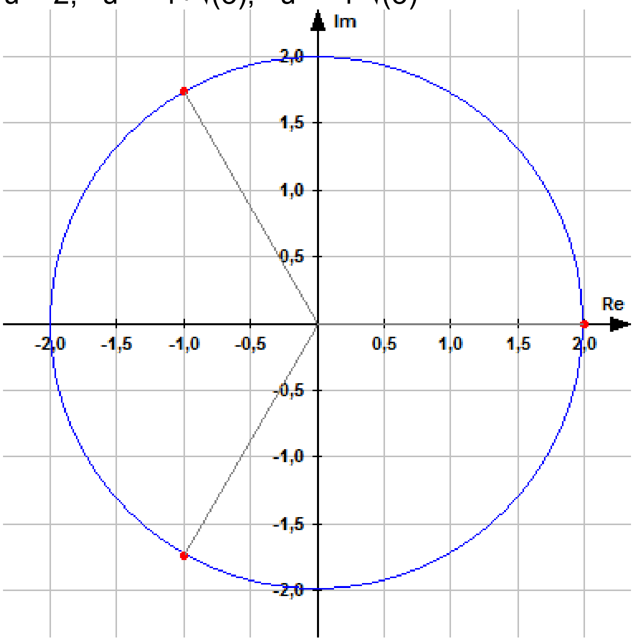
Demgegenüber gilt für v : $z^* = -\frac{q}{2} - \sqrt{D}$

Fall: D ≥ 0

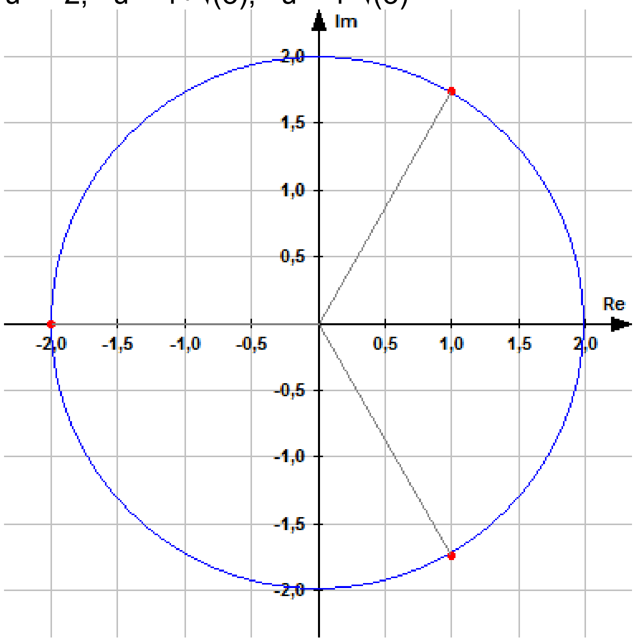
Ist die Diskriminante **D ≥ 0** , so ist auch der Imaginärteil von z gleich 0 . Also $\tan(\varphi) = 0$.

Für den Winkel bleiben dann nur die Werte $\varphi = 0$ (z>0) oder $\varphi = p$ (z<0) ; siehe Grafikbeispiele.

Lösungen für $u^3 = 8$
$u = 2$; $u = -1+\sqrt{(3)}$; $u = -1-\sqrt{(3)}$



Lösungen für $u^3 = -8$
$u = -2$; $u = 1+\sqrt{(3)}$; $u = 1-\sqrt{(3)}$



Die Lösungen für u sind dann : $u_k = \sqrt[3]{z} \cdot [\cos(\frac{k \cdot 2\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{k \cdot 2\pi}{3})]$; $k = 0,1,2$

Dies bedeutet : $u_0 = \sqrt[3]{z}$ $\quad u_1 = \sqrt[3]{z} \cdot (-0,5 + i \cdot 0,5 \cdot \sqrt{3}) = 0,5 \cdot \sqrt[3]{z} \cdot (-1 + i \cdot \sqrt{3})$

$$u_2 = \sqrt[3]{z} \cdot (-0,5 - i \cdot 0,5 \cdot \sqrt{3}) = 0,5 \cdot \sqrt[3]{z} \cdot (-1 - i \cdot \sqrt{3})$$

Die Lösungen für v sind ebenso wie die für u, allerdings mit z* statt z .

Außerdem muss man bei der Kombination y = u + v die Nebenbedingung uv = -p/3 beachten :

Zu $u_1 = 0,5 \cdot \sqrt[3]{z} \cdot (-1 + i \cdot \sqrt{3})$ passt nicht $v_1 = 0,5 \cdot \sqrt[3]{z^*} \cdot (-1 + i \cdot \sqrt{3})$, weil das Produkt u1·v1 nicht reell ist. Wählt man aber $v_1 = 0,5 \cdot \sqrt[3]{z^*} \cdot (-1 - i \cdot \sqrt{3})$, so gilt $u_1 \cdot v_1 = \sqrt[3]{zz^*} = u \cdot v = -\frac{p}{3}$.

Ebenso findet man zu $u_2 = 0,5 \cdot \sqrt[3]{z} \cdot (-1 - i \cdot \sqrt{3})$

die passende Lösung $v_2 = 0,5 \cdot \sqrt[3]{z^*} \cdot (-1 + i \cdot \sqrt{3})$.

Für y = u+v findet man: $y_1 = u_0 + v_0 = \sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{z^*}$.

Dies führt auf folgende bekannte Formel :

$$\boxed{y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}}$$

Cardanische Formel (TARTAGLIA)

$y_2 = u_1 + v_1 = 0,5 \cdot \sqrt[3]{z} \cdot (-1 + i \cdot \sqrt{3}) + 0,5 \cdot \sqrt[3]{z^*} \cdot (-1 - i \cdot \sqrt{3})$ sowie

$$y_3 = u_2 + v_2 = 0,5 \cdot \sqrt[3]{z} \cdot (-1 - i \cdot \sqrt{3}) + 0,5 \cdot \sqrt[3]{z^*} \cdot (-1 + i \cdot \sqrt{3})$$

Unter Verwendung von u (=u_0) und v(=v_0) lassen sich diese beiden Formeln übersichtlicher notieren:

$y_2 = 0,5 \cdot u \cdot (-1 + i \cdot \sqrt{3}) + 0,5 \cdot v \cdot (-1 - i \cdot \sqrt{3})$ bzw. $\boxed{y_2 = -(u+v)/2 + (u-v)/2 \cdot i \cdot \sqrt{3}}$

$y_3 = 0,5 \cdot u \cdot (-1 - i \cdot \sqrt{3}) + 0,5 \cdot v \cdot (-1 + i \cdot \sqrt{3})$ bzw. $\boxed{y_3 = -(u+v)/2 - (u-v)/2 \cdot i \cdot \sqrt{3}}$

Die <u>Lösung</u> erhält man dann jeweils durch Rücksubstitution **x = y - r / 3** !!

Recht einfach ermittelt man y für den **Spezialfall** **D = 0**

Es ist dann u = v = $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ und somit bekommt man ausschließlich reelle Lösungen !

$$y_1 = -2 \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \Rightarrow \boxed{x = -2 \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{2}} - \frac{r}{3}}$$

$$y_2 = y_3 = -u = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \Rightarrow \boxed{x_2 = x_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} - \frac{r}{3}}$$

Fall: **D < 0**

Der Fall **D < 0** ist der schwierigste, denn bereits z und z* sind (konjugiert) komplex .

Weil die Lösung im 15. und 16. Jahrhundert nicht zu bewältigen war, nannte man diesen Fall

casus irreducibilis .

Die Auflösung gelingt auf trigonometrischem Wege (de Moivre) .

Überraschenderweise sind alle Lösungen reell !

Zusammenfassung CARDANO:

Gegeben sind die reellen Koeffizienten: a, b, c, d (a darf nicht 0 sein !)

Folgende Berechnungen sind durchzuführen:

$r = b/a \qquad s = c/a \qquad t = d/a$

$p = s - r^2/3 \qquad q = t - rs/3 + 2r^3/27$

$D = (q/2)^2 + (p/3)^3$

1.Fall: $D \geq 0$

D = 0 : 3 reelle Lösungen;
- für $p \neq 0$ (und somit $q \neq 0$) sind davon 2 übereinstimmende
- für p = 0 (und somit q = 0) sind alle Lösungen gleich !

D > 0 : 1 reelle und 2 komplexe Lösungen

Wir bilden $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$

für D = 0 gilt u = v ; falls zusätzlich p = q = 0 gilt, dann sind u und v beide = 0

Die Lösungen sind:

$$x_1 = u + v - \frac{r}{3}$$
$$x_2 = -\frac{u+v}{2} - \frac{r}{3} + i \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{u-v}{2}$$
$$x_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{r}{3} - i \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{u-v}{2}$$

2.Fall: D < 0

„Casus irreducibilis“ ; 3 reelle Lösungen

Wir bilden $w = \sqrt{-(\frac{p}{3})^3} \qquad \phi = \arccos(-\frac{q}{2w})$

Die Lösungen sind:

$$x_1 = 2 \cdot \sqrt[3]{w} \cdot \cos(\frac{\phi}{3}) - \frac{r}{3}$$
$$x_2 = 2 \cdot \sqrt[3]{w} \cdot \cos(\frac{\phi + 2\pi}{3}) - \frac{r}{3}$$
$$x_3 = 2 \cdot \sqrt[3]{w} \cdot \cos(\frac{\phi + 4\pi}{3}) - \frac{r}{3}$$

JAVA-Programm CARDANO (Console):

```java
public static double[] reduzierteForm(double a, double b, double c, double d) {
	// liefert y³ + p*y + q = 0, also p und q, sowie diskr und r
	double r, s, t, p, q, diskr;
	r = b / a;
	s = c / a;
	t = d / a;
	p = s - r * r / 3;
	// System.out.println("p=" + p);
	q = 2 * r * r * r / 27 - s * r / 3 + t;
	// System.out.println("q=" + q);
	diskr = p * p * p / 27 + q * q / 4;
	// System.out.println("diskr=" + diskr);
	return new double[] {p, q, r, diskr};
}

public static double[] zwei_komplexe_Loesungen(double diskr, double q, double r) {
	double u, v, x1, re, im;
	u = Math.cbrt(Math.sqrt(Math.abs(diskr)) - q / 2);
	v = Math.cbrt(-Math.sqrt(Math.abs(diskr)) - q / 2);
	x1 = u + v - r / 3;
	re = -(u + v) / 2 - r / 3;
	im = Math.sqrt(3) * (u - v) / 2;
	return new double[] {x1, re, im};
}

public static double[] casus_irreduzibilis(double p, double q, double r) {
	double w, w2, phi, x1, x2, x3;
	w = Math.sqrt(-p * p * p / 27);
	w2 = 2 * Math.cbrt(w);
	phi = Math.acos(-q / 2 / w);
	x1 = w2 * Math.cos(phi / 3) - r / 3;
	x2 = w2 * Math.cos(phi / 3 + 2 * Math.PI / 3) - r / 3;
	x3 = w2 * Math.cos(phi / 3 + 4 * Math.PI / 3) - r / 3;
	return new double[] {x1, x2, x3};
}

public static double[] kubGleichung(double a, double b, double c, double d) {
	// Lösen von  ax³ + bx² + cx + d = 0  nach CARDANO
	if (a == 0)
		throw new IllegalArgumentException(" a darf nicht 0 sein !");

	double r, p, q, diskr, x1, x2, x3;
	double[] loes;
	double [] reduzF = reduzierteForm(a, b, c, d);
	p =  reduzF[0];
	q =  reduzF[1];
	r = reduzF[2];
	diskr = reduzF[3];

	if (istNull(diskr)) { // Diskriminante = 0
	  if (p == 0) { // 3-fache reelle Lösung
	    x1 = -r/3;
	    x2 = x3 = x1;
	  } else { // 3 reelle lösungen (2 übereinstimmend)
		loes = zwei_komplexe_Loesungen(diskr, q, r); // Imaginärteil ist hier = 0
		x1 = loes[0];
		x2 = x3 = loes[1]; // loes[2] = 0 ist Imaginärteil !
	  }
	} else if (istPositiv(diskr)) {
		loes = zwei_komplexe_Loesungen(diskr, q, r);
```

```
			x1 = loes[0];
			x2 = loes[1]; // re
			x3 = loes[2]; // im
			return new double[] {x1, x2, x3, 0}; // 0 bedeutet "2 konj. komplexe Lös."
		} else {
			loes = casus_irreduzibilis(p, q, r); // Diskriminante < 0;  3 reelle Lös.
			x1 = loes[0];
			x2 = loes[1];
			x3 = loes[2];
		}

		return new double[] {x1, x2, x3};
	}
```

Durchgerechnete Beispiele:

1) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ Lös.: 1 1 1

2) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ Lös.: 1 2 3

3) $x^3 - 1x^2 + 1x - 1$ Lös.: 1 -i i

4) $x^3 - 15x - 126$ Lös.: 6
$-3 - i \cdot 3.4641016151377544$
$-3 + i \cdot 3.4641016151377544$

5) $x^3 - 2x^2 - 1x + 2$ Lös.: 1 -1 2

6) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ Lös.: 1 1 2

7) $x^3 - 9x^2 + 33x - 65$ Lös.: 5 2-3i 2+3i

8) $x^3 - 981x - 11340$ Lös.: 36 -21 -15

9) $x^3 + x + 1$ Lös.: -0.6823278038280194
$0.3411639019140097 - i \cdot 1.1615413999972518$
$0.3411639019140097 + i \cdot 1.1615413999972518$

10) $3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$ Lös.: 2 -1 0,333333333333333

11) $x^3 + 6x - 20$ Lös.: 2 -1-3i -1+3i