Einführung in die Chaostheorie (Teil 1) Ac 2018

Die sogenannte Chaostheorie befasst sich mit der Erforschung nichtlinearer dynamischer Systeme, die chaotisches Verhalten zeigen können. Chaotisches Verhalten liegt u.a. dann vor, wenn geringste Änderungen in den Anfangsbedingungen zu nahezu beliebig großen Änderungen führen (sogenannter „Schmetterlingseffekt“). Beispiele für Systeme, die gelegentlich chaotisches Verhalten zeigen, sind: Wetter, Wirtschaftskreisläufe, Bevölkerungswachstum, Herzschlag , tropfender Wasserhahn, etc. .

Bei der Betrachtung des deterministischen (geordneten) Chaos liefert vor allem eine berühmte Gleichung viele Überraschungen. Es handelt sich um die sog.

„logistische Gleichung“ $\mathbf{x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)}$

<u>Anmerkung:</u>
Diese Gleichung beschreibt übrigens einen interessanten Prozess in der Natur, nämlich die schwankenden Zahlen von Tierbevölkerungen. x_{n+1} stellt hierbei die Zahl der Tiere in der neuen Generation dar. Der Zahlenwert wird so normiert, dass er nur zwischen 0 und 1 (1 = 100% der Population) schwanken kann.

Man setzt bei vorgegebenem festen k-Wert zu Beginn (n = 0) für x_0 eine Zahl zwischen 0 und 1 ein , z.B. 0,4 , und berechnet dann x_1 . Anschließend wird x_1 rechts eingesetzt und x_2 berechnet, und so fort . Man erhält auf diese Art eine **<u>Folge</u>** von Zahlen. Interessant ist bei Folgen, ob sie einem Grenzwert zustreben, d.h. man untersucht, ob die Glieder der Folge über alle Grenzen wachsen oder sich einem festen Wert, dem Grenzwert, nähern. Wir werden sehen, dass die durch obige Gleichung definierten Folgen sogar gegen <u>verschiedene</u> feste Werte streben können, abhängig vom jeweils gewählten k-Wert. In der Mathematik spricht man dann von **<u>Häufungswerten</u>**, da sich die Folgenglieder in der Umgebung dieser Werte häufen !

<u>Beispielrechnung für k = 1:</u> Dann gilt $x_{n+1} = x_n \cdot (1 - x_n)$

Wir starten mit $x_0 = 0{,}4$.
$x_1 = 0{,}4 \cdot (1 - 0{,}4) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$.
$x_2 = 0{,}24 \cdot (1 - 0{,}24) = 0{,}24 \cdot 0{,}76 = 0{,}1824$.
$x_3 = 0{,}1824 \cdot (1 - 0{,}1824) = 0{,}1824 \cdot 0{,}8176 = 0{,}14913024$.
Es ist bereits jetzt zu sehen, dass die begrenzte Nachkommastellenzahl ein Problem werden kann.

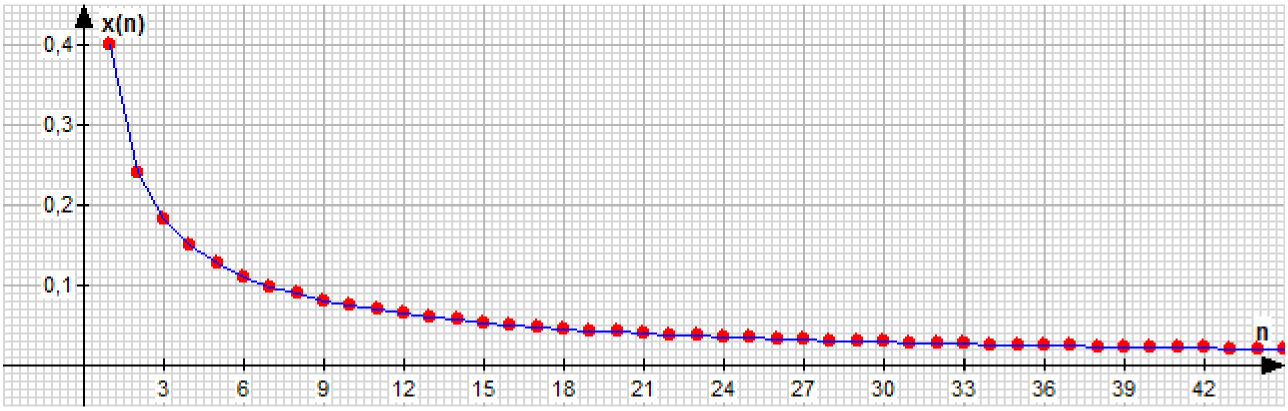
Ein Computer (Delphi-System mit 18-stelliger Genauigkeit) liefert folgendes :

n	$\mathbf{x_n}$
0	0,4
1	0,24
2	0,1824
3	0,14913024
4	0,1268904115175424
5	0,11078923498245114
6	0,09851498039445437
7	0,08880977903233464
8	0,08092260218056253
9	0,07437413463688895
10	0,06884262273390286
…...	
500	0,00196805528565881
501	0
502	0

Offensichtlich strebt die Folge dem Grenzwert 0 zu !
Bei anderen Startwerten , etwa 0,6 oder 0,2, ist der Grenzwert ebenfalls 0 .

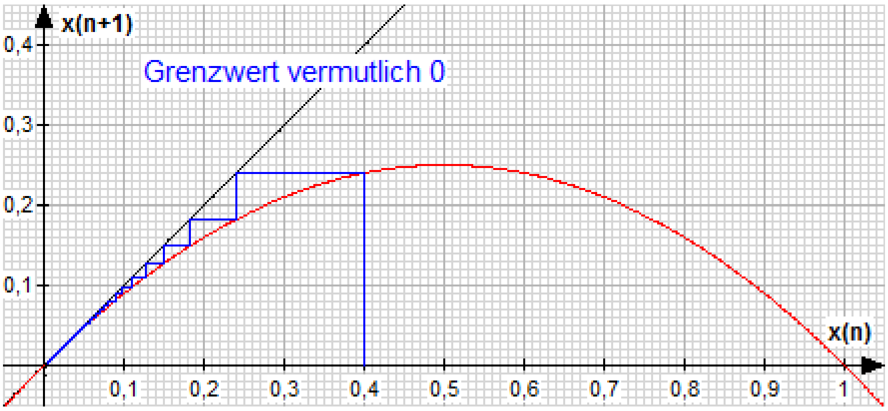
Die Darstellung des Ergebnisses der Tabelle in einer **Zeitreihe** $n \rightarrow x_n$ lässt Konvergenz vermuten .

Zeitreihe für k = 1 :



Eine weitere Darstellungsmöglichkeit bietet das sog. **Cob-Web-Diagramm** mit x_n auf der Rechtsachse und x_{n+1} auf der Hochachse . Das Streben hin zum Grenzwert 0 ist hier besonders deutlich zu erkennen.

Cob-Web - Diagramm für k = 1 :



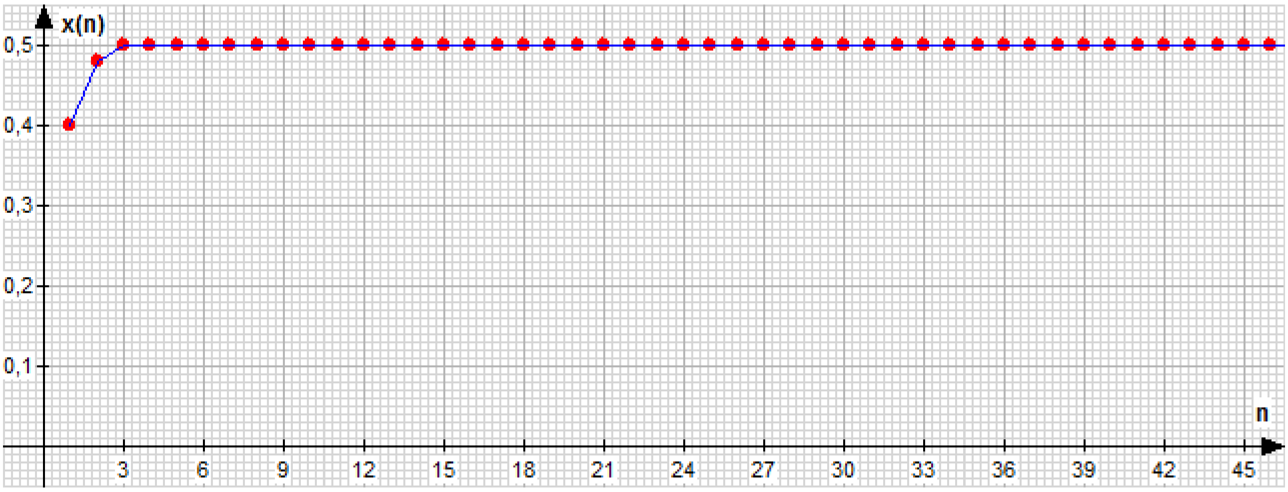
Man kann den Grenzwert auch ermitteln, indem man die Gleichung $x = x \cdot (1 - x)$ nach x auflöst. Nimmt man nämlich an, dass sich die Folgenglieder für $x_n = x$ nicht mehr ändern (man spricht auch vom „**Fixpunkt**“ x) , so gilt für diesen Fall gerade $x = x \cdot (1 - x)$.

Die Umformung ergibt: $x = x - x^2$, woraus $x^2 = 0$ folgt.
Die einzige Lösung ist dann x = 0, also der bereits aus den Computerberechnungen vermutete Grenzwert.

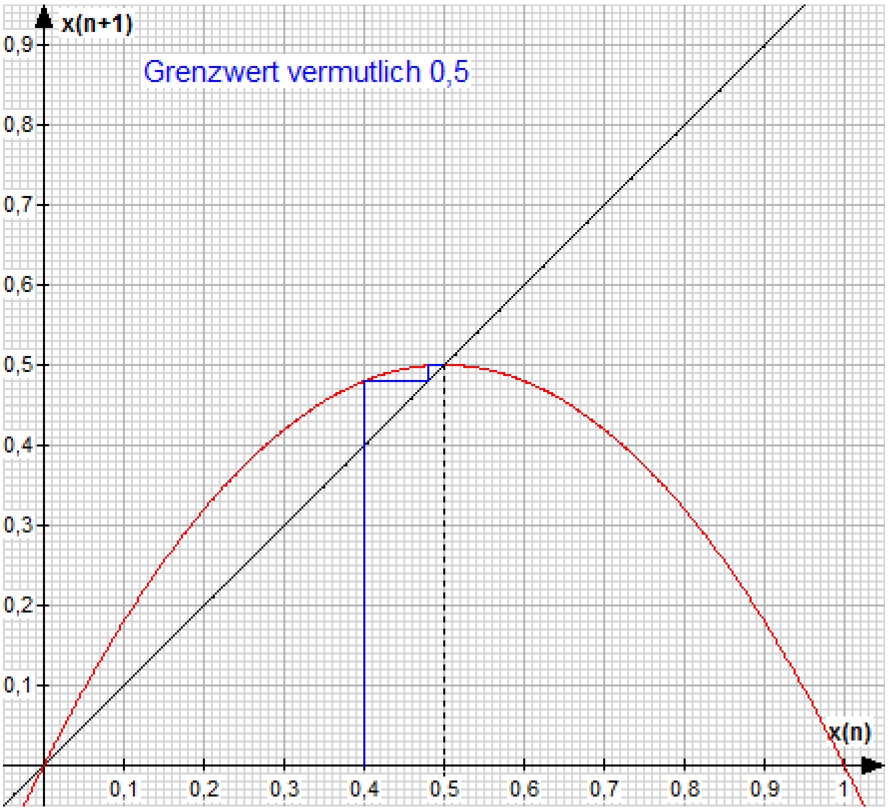
Zusammenfassung für k = 1 :
Die Folge $x_{n+1} = x_n \cdot (1 - x_n)$ hat den Grenzwert 0 . Dieser Grenzwert wird unabhängig vom Startwert x_o erreicht, sofern $x_o \in]\,0\,;1\,[$.
$\bar{x} = 0$ ist auch der einzige Fixpunkt der Gleichung $x = x \cdot (1 - x)$.

Wir sehen uns auch noch die Diagramme für k = 2 an : $x_{n+1} = 2x_n \cdot (1 - x_n)$

Zeitreihe für k=2 :



Cob-Web-Diagramm für k=2:



Hier sieht die Sache etwas anders aus, denn von den beiden Fixpunkten 0 und 0,5 entpuppt sich nur 0,5 als attraktiv (anziehend) !

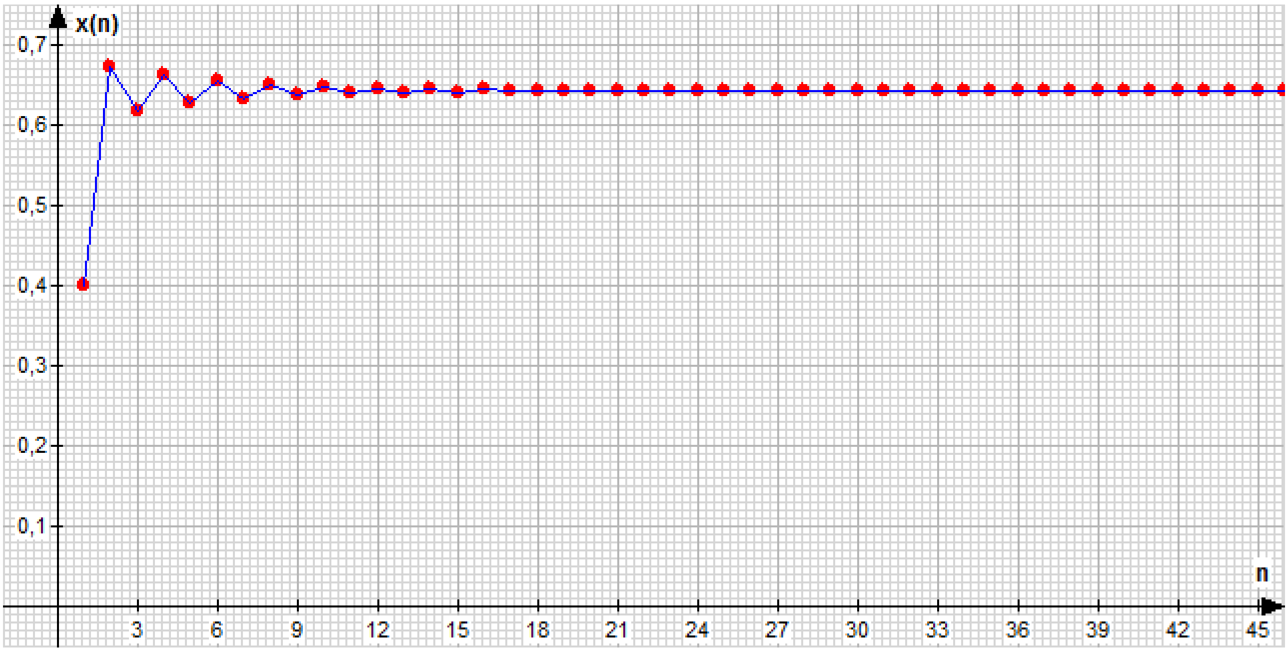
In diesem Fall spricht man sogar von „**superattraktiv**“, weil die Tangente des Graphen von 2x(1-x) am Fixpunkt waagerecht verläuft. Dadurch liegt hier eine <u>besonders schnelle Konvergenz</u> vor.

Die Entwicklung der Folge für verschiedene größere k-Werte soll im Folgenden untersucht werden:

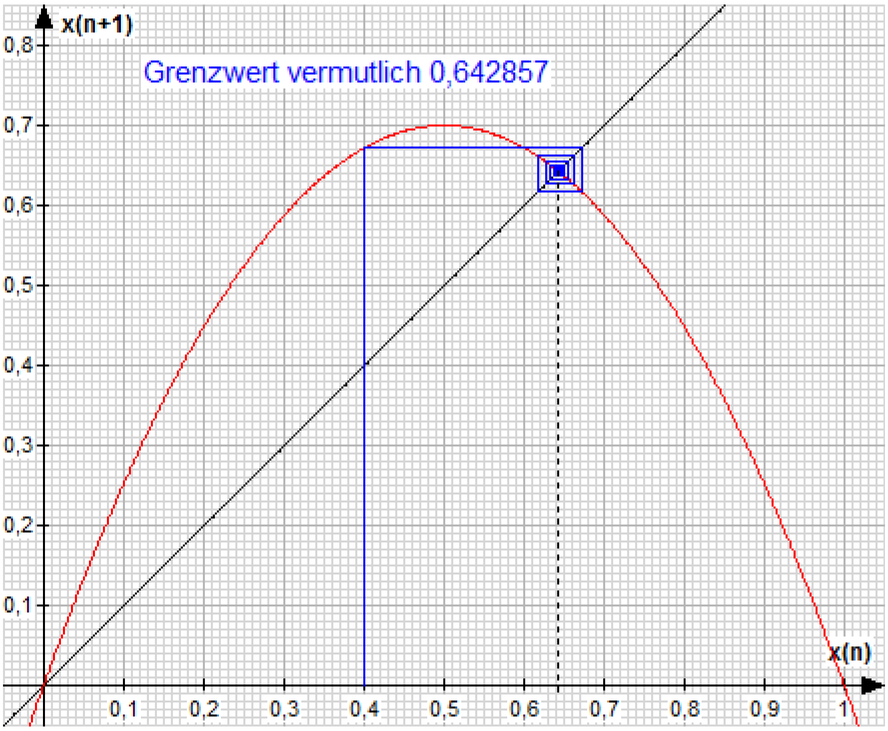
Iteration der rekursiven Folge $x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$
Die Iterationen werden durchgeführt mit k = 2,8 ; 3,2 ; 4 . Der Startwert sei immer $x_0 = 0{,}4$

<u>Für k = 2,8 gilt :</u> $x_{n+1} = 2{,}8 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$

<u>Zeitreihe für k = 2,8 :</u>



<u>Cob – Web – Diagramm für k = 2,8 :</u>



<u>Fixpunktberechnung:</u>

Aus $x = 2{,}8x \cdot (1 - x)$ folgt $x = 2{,}8x - 2{,}8x^2$ und somit $2{,}8x^2 = 1{,}8x$.
Lösungen: $x = 0$ bzw. $x = 9/14$ (2 Fixpunkte).

Zusammenfassung für k = 2,8 :

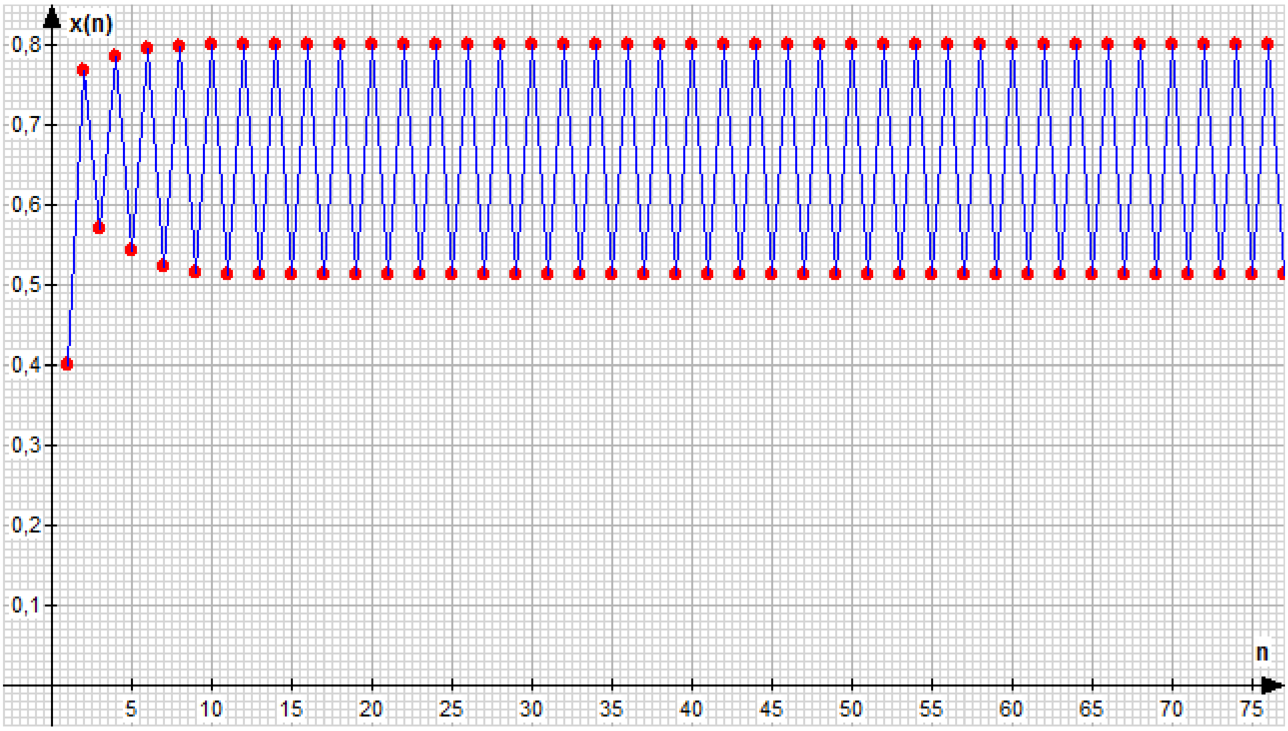
Die Folge $x_{n+1} = 2{,}8 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$ hat den Grenzwert $\approx 0{,}643$.
Dieser Grenzwert wird unabhängig vom Startwert x_o erreicht, sofern $x_o \in \,]\, 0 \,;\, 1 \,[$.

$\bar{x} = 0{,}643$ (genau: $\frac{9}{14}$) ist auch (neben $\bar{x} = 0$) ein Fixpunkt der Gleichung $x = 2{,}8 \cdot x \cdot (1 - x)$.

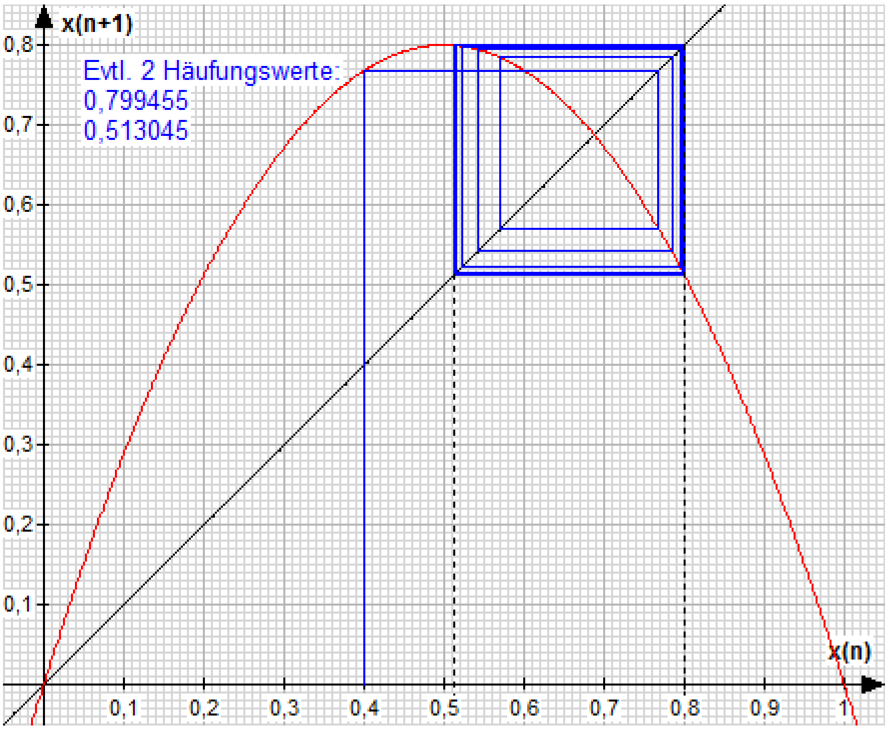
Definition : (**attraktiv, repulsiv**)
Strebt die Folge x_n gegen den Fixpunkt $\bar{x}$, so heißt dieser **anziehend** bzw. **attraktiv** , andernfalls **abstoßend** bzw. **repulsiv** .

Für k = 3,2 gilt : $x_{n+1} = 3{,}2 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$

Zeitreihe für k = 3,2 :



Cob – Web – Diagramm für k = 3,2



Fixpunktberechnung:

Aus x = 3,2x·(1 – x) folgt x = 3,2x - 3,2x² und somit 3,2x² = 2,2x. Lösungen: x = 0 bzw. x = 11/16.

Zusammenfassung für k = 3,2 :

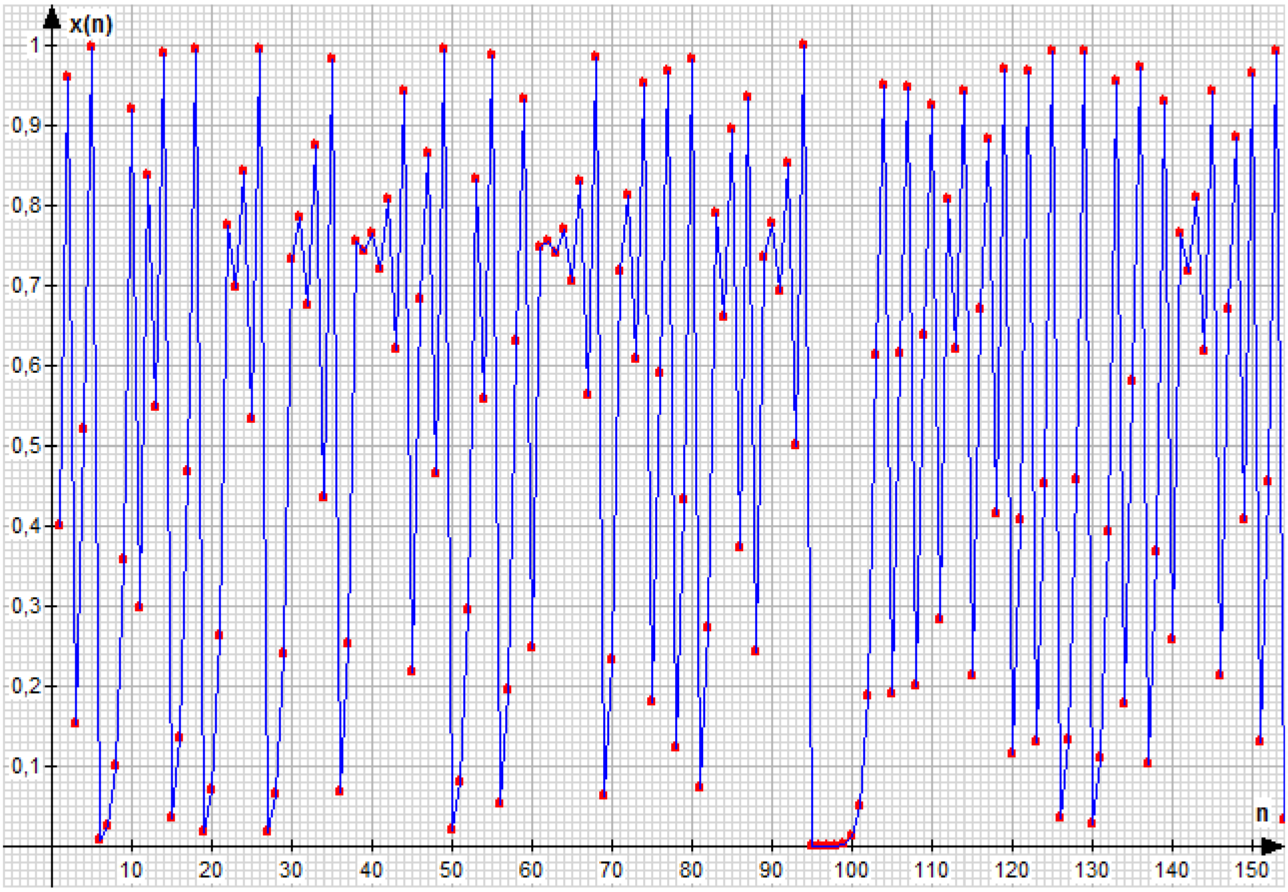
Die Folge $x_{n+1} = 3{,}2 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$ hat keinen Grenzwert, sondern **2 Häufungspunkte bei ≈ 0,513 und bei ≈ 0,8** .
Diese Häufungspunkte werden unabhängig vom Startwert x_o erreicht, sofern $x_o \in \,]\,0\,;\,1\,[$.

Erstaunlicher Weise haben beide nichts mit den Fixpunkten der Gleichung $x = 3{,}2 \cdot x \cdot (1 - x)$, nämlich $\bar{x} = 0$ sowie $\bar{x} = 0{,}6875$, zu tun .

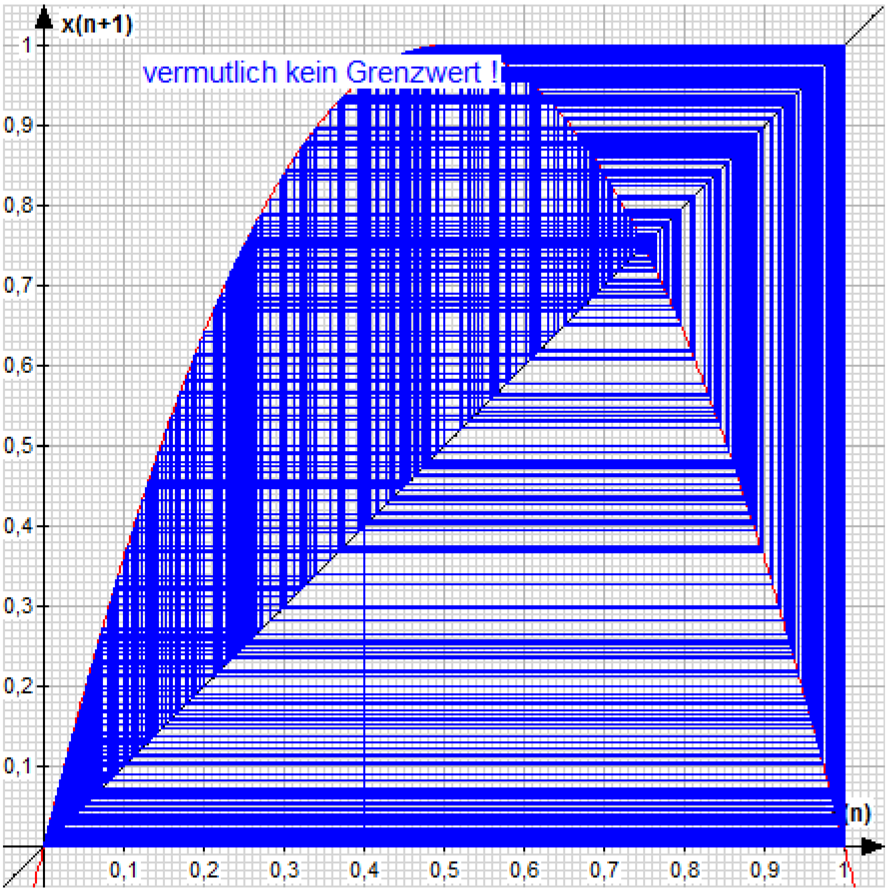
Später werden wir sehen, dass man auch diese beiden Häufungspunkte algebraisch berechnen kann !

Für k = 4 gilt : $x_{n+1} = 4 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$

Zeitreihe für k = 4 :



Cob – Web – Diagramm für k = 4 :



Fixpunktberechnung:

Aus $x = 4x\cdot(1 - x)$ folgt $x = 4x - 4x^2$ und somit $4x^2 = 3x$. Lösungen: $x = 0$ bzw. $x = 3/4$.

Zusammenfassung für k = 4 :

Die Folge $\mathbf{x_{n+1} = 4 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)}$ hat keinen Grenzwert, sondern beliebig viele **Häufungspunkte,** die sich für $x_o \in]\,0\,;\,1\,[$ erzeugen lassen . Wegen der Beliebigkeit der Anzahl der Häufungspunkte kann man schwer entscheiden, ob verschiedene Startwerte die gleichen Häufungspunkte erzeugen.

Forschungen haben gezeigt, dass diese Folge sehr empfindlich auf verschiedene Startwerte reagiert, d.h. es ist keine Vorhersage über den Verlauf der Folge möglich.
Man nennt diese Folge daher auch **CHAOS – Folge** .

Zusammenfassung der Iteration $x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$; $k > 0$

Die angegebene Iterationsgleichung (auch **„logistische Gleichung“** genannt) gehört zum Gebiet der sog. CHAOS-Forschung (**„Chaos und Ordnung in dynamischen Systemen“**) . Forscher verwenden die Gleichung, um Aussagen und ggfs. Vorhersagen über komplexe Systeme wie Herzschlag (Medizin), Populationen (Biologie), Doppelpendel (Physik/Technik) oder das Wetter machen zu können .

In der Forschung wurden bzgl. der obigen Gleichung folgende Ergebnisse erzielt:

$0 < k \le 1$	Die Folge besitzt einen Grenzwert, nämlich 0 .
$1 < k \le 3$	Die Folge besitzt einen Grenzwert, nämlich $1 - \frac{1}{k}$.
$3 < k < 1+\sqrt{6} \approx$ 3,4494897	Die Folge besitzt 2 Häufungswerte $\frac{k+1\pm\sqrt{k^2 - 2k - 3}}{2k}$ (Anm.: Die Menge aller Häufungswerte heißt „Attraktor“) .
$3{,}4494897 < k \le 3{,}544090$	In diesem Intervall erhalten wir 4 Häufungswerte .
$3{,}544090 < k \le 3{,}564407$	In diesem Intervall erhalten wir 8 Häufungswerte .
$3{,}564407 < k \le 3{,}568759$	In diesem Intervall erhalten wir 16 Häufungswerte .
$3{,}568759 < k \le 3{,}569692$	In diesem Intervall erhalten wir 32 Häufungswerte .
$3{,}569692 < k \le 3{,}569891$	In diesem Intervall erhalten wir 64 Häufungswerte .
… …	...
$3{,}57 < k \le 4$	Die Folge verhält sich chaotisch, d.h. es gibt unendlich viele Häufungswerte, und das Verhalten der Folge ist nicht vorhersagbar . Bereits bei kleinen Veränderungen des Startwerts ergeben sich große Unterschiede im Verhalten der Folge !
$k > 4$	Die Folge ist divergent !

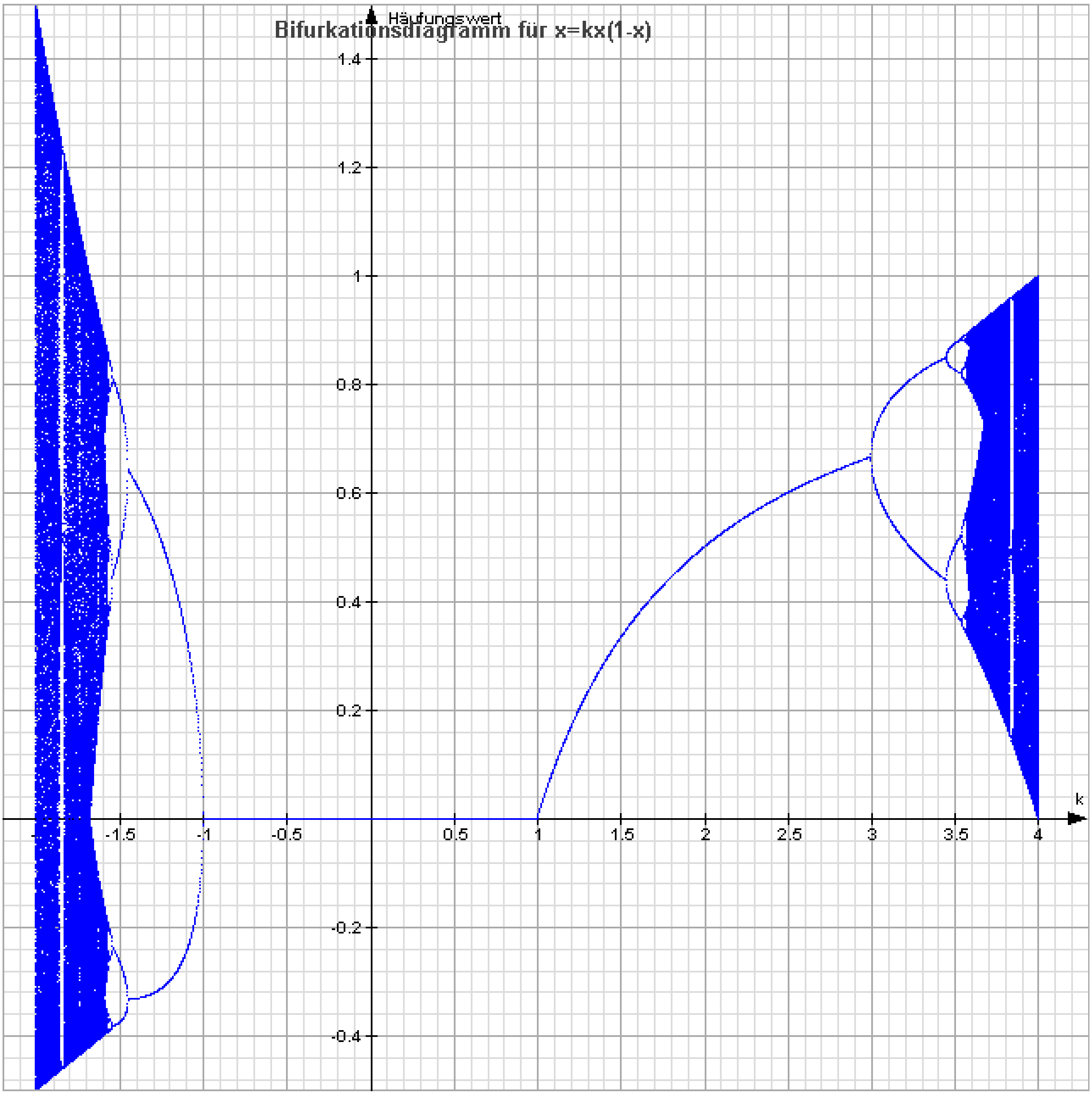
Hinweis: Im Kapitel über Zweierzyklen, Vierzyklen, etc. wird der rechnerische Nachweis für einige der oben angegebenen Intervalle erbracht !

Bifurkations-Diagramm

Man kann die Häufungswerte in Abhängigkeit des Parameters k darstellen.

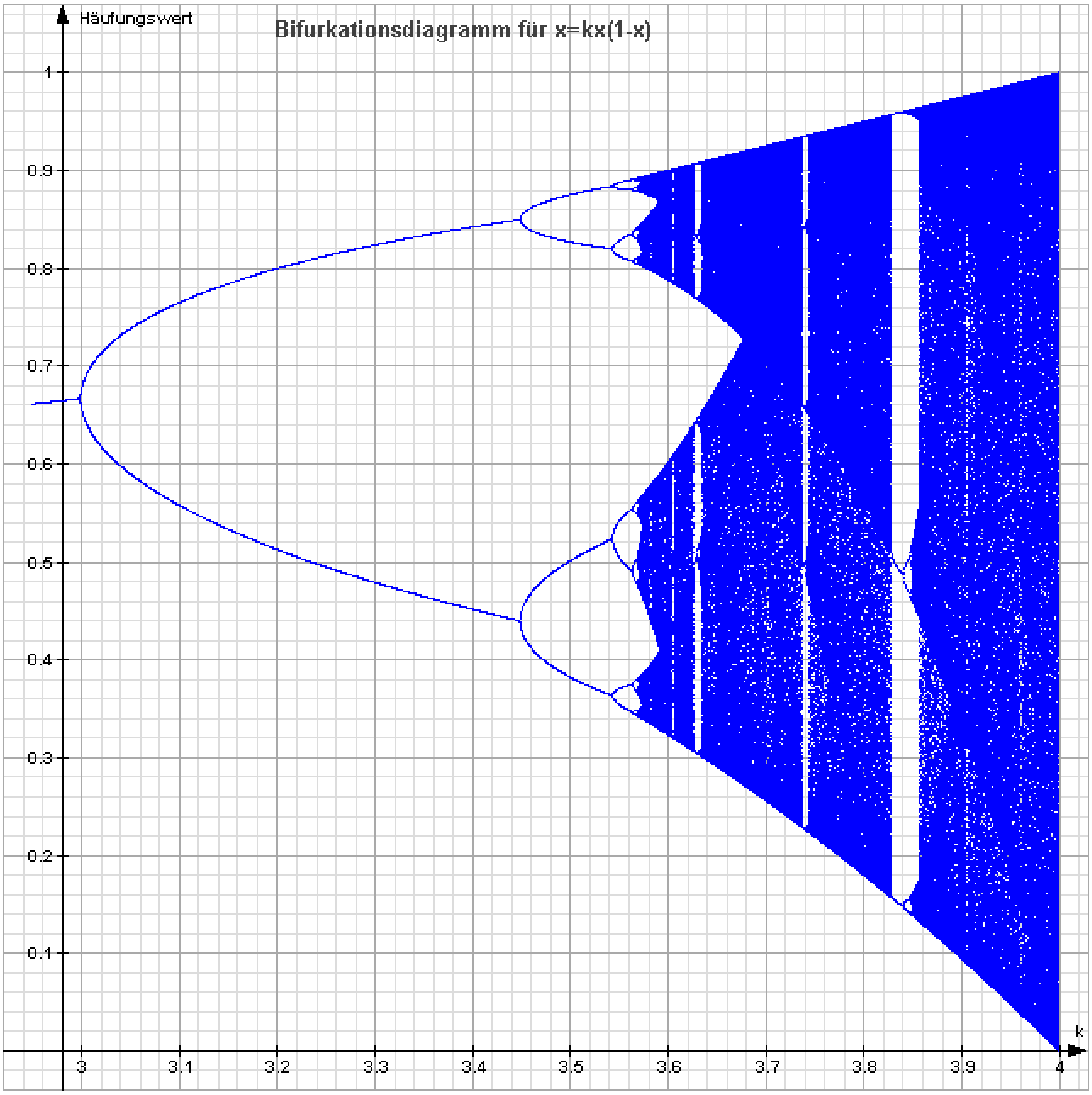
Dieses Diagramm heißt „**FEIGENBAUM – Diagramm**“ oder „**Bifurkations-Diagramm**“ .
(Anmerkung: Mitchell J. Feigenbaum ist ein Physiker und „Chaos“ – Forscher)

Für $x = kx(1-x)$ erhält man folgendes Diagramm:



Wie man sieht, gibt es sowohl im negativen als auch im positiven k-Bereich Häufungspunkte !

Einen Ausschnitt aus dem positiven k-Bereich zeigt das folgende Diagramm:



<u>Anmerkung:</u> Dieser Ausschnitt des Feigenbaumdiagramms wurde mit 2000 Iterationen berechnet .

Man erkennt deutlich die fortgesetzte Aufspaltung in immer mehr Häufungswerte und den Übergang ins Chaos .

Ferner lässt sich feststellen, dass selbst im Chaos noch **„stabile Inseln“** möglich sind !

Es folgen jetzt einige **algebraische** Untersuchungen:

Berechnung der k-Intervalle für das Vorliegen von Häufungspunkten

Vorbemerkung:

Bei den hier betrachteten Iterationen liegt stets das sogenannte **Allgemeine Iterationsverfahren** vor, welches nach der Formel $\mathbf{x_{n+1} = g(x_n)}$ abläuft . Man nennt g(x) die Iterationsfunktion .
Das Verfahren konvergiert dann, wenn in einem Intervall I (bzw. „einer Umgebung U“) um den Grenzwert für jedes x aus I gilt: $\mathbf{| g'(x) | < 1}$. g' ist hierbei die erste Ableitung von g(x).
Daher bedeutet obige Ungleichung, dass bei einer Steigung des Graphen von g(x), die betraglich kleiner als 1 ist (bzw. Steigung zwischen -1 und +1) das Iterationsverfahren konvergiert.
(Für den Fall | g'(x) | = 1 lässt sich dagegen keine Aussage über das Konvergenzverhalten machen.)

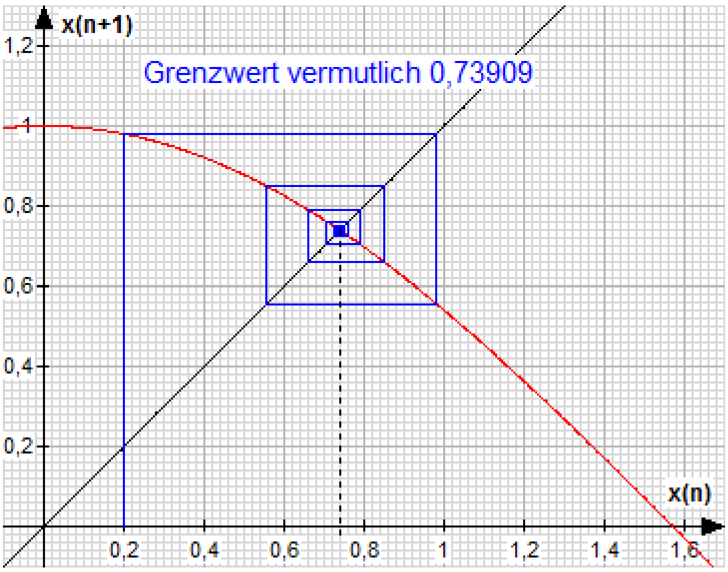
Die Konvergenz lässt sich z.B. anhand von $\mathbf{g(x) = cos(x)}$ überprüfen:

g '(x) = -sin(x) , somit ist die Ungleichung $\mathbf{| -sin(x) | < 1}$.

Bei diesem Beispiel ist die Ungleichung sogar für fast alle x erfüllt, denn die Sinusfunktion beträgt vom Betrag her maximal 1 , und zwar an den relativen Extremstellen. Diese stimmen mit den Nullstellen der Cosinusfunktion überein. Also kommen außer $x_i = (2n+1) \cdot \pi /2$ alle anderen x-Werte als Startwerte x_0 infrage .

Z.B. $x_0 = 0{,}2$ (weitere Rechnung im Bogenmaß !)
$x_1 = \cos(0{,}2) = 0{,}98...$
$x_2 = \cos(0{,}98...) = 0{,}55696...$
usw.

Das folgende sogenannte „Cob-Web-Diagramm“ stellt die Iteration dar und liefert auch eine Näherung für den Grenzwert, nämlich 0,73909.
Außerdem sieht man, dass die Steigung der Cosinusfunktion betraglich nie größer als 1 ist.



Wir kommen zurück zu unserer Iteration mit $x = k \cdot x \cdot (1 – x)$ sowie zur analytischen Berechnung der k-Intervalle:

1. *Für welche k hat die Iteration mit $g(x) = k \cdot x \cdot (1-x)$* ***genau einen*** *Häufungswert (einen Grenzwert) ?*

Dazu bestimmen wir zunächst die x-Koordinaten der Fixpunkte:

$x = k \cdot x \cdot (1 - x)$ besitzt die Lösungen $\bar{x} = 0$ sowie $\bar{x} = 1 - \frac{1}{k}$.

Anschließend untersuchen wir die Bedingung $|g'(x)| < 1$ in einer Umgebung des jeweiligen Fixpunktes:
Es gilt: $g'(x) = k \cdot (1-x) + k \cdot x \cdot (-1) = k \cdot (1-2x)$. Zu untersuchen ist also $|k \cdot (1-2x)| < 1$.

Für $\bar{x} = 0$ ergibt sich dann $|k| < 1 \Leftrightarrow$ (wegen $k > 0$) $0 < k < 1$

Übrigens ist auch für $k = 1$ der Grenzwert = 0, wie sich leicht überprüfen lässt !

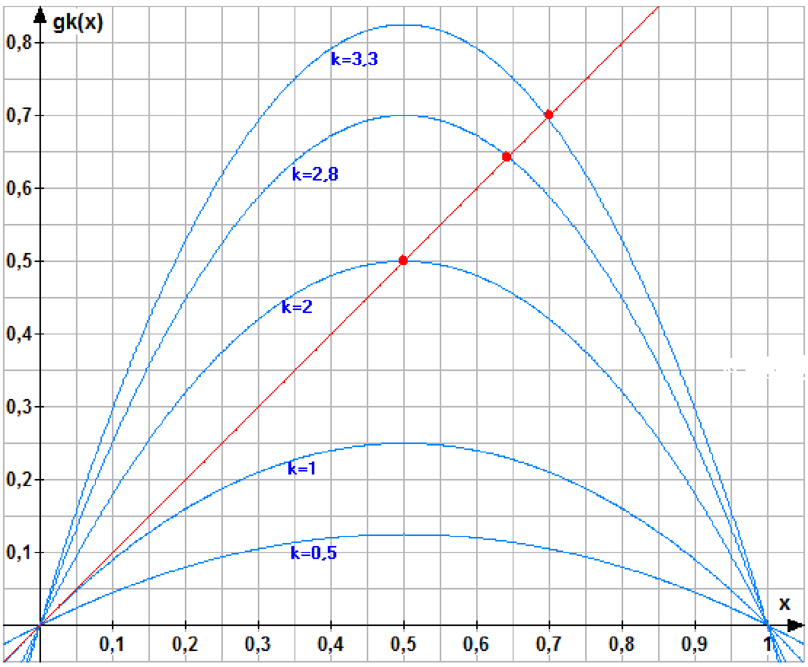
Für $\bar{x} = 1 - \frac{1}{k}$ ergibt sich $\left| k \cdot (1 - 2 \cdot (1 - \frac{1}{k})) \right| < 1 \Leftrightarrow |-k + 2| < 1 \Leftrightarrow 1 < k < 3$

Zusammenfassung:

Die Iteration mit $g(x) = k \cdot x\,(1 - x)$ besitzt für $0 < k \leq 1$ den Grenzwert $g = 0$ und für $1 < k \leq 3$ den Grenzwert $g = 1 - \frac{1}{k}$

Dies konnte an Beispielen ($k = 1$; $k = 2{,}8$) bereits beobachtet werden .
Für den Fall $k = 3$ siehe Betrachtung unten !

In der folgenden Grafik mit $g(x) = kx(1-x)$ $k = 0{,}5$ 1 2 2,8 3,3 kann man sich den Sachverhalt anhand der Steigungen nochmals grafisch veranschaulichen :



Wir betrachten nur den 2. Fixpunkt ($\neq 0$)
Dieser ist in der Grafik jeweils markiert:

Die Grafen mit k=0,5 und k=1 besitzen überhaupt keinen 2. Fixpunkt .

Der Graf mit $k = 3{,}3$ besitzt zwar einen 2. Fixpunkt, jedoch ist dort seine Steigung betraglich größer als 1, so dass keine Konvergenz zu erwarten ist.

Die Grafen für k=2 und k=2,8 besitzen einen 2. Fixpunkt und man kann wegen der Steigungsverhältnisse Konvergenz erwarten.
Exakte Rechnungen hierzu:
k=2: $g_k'(0{,}5) = 2 \cdot (1-2 \cdot 0{,}5) = 0$.
k=2,8: $g_k'(9/14) = 2{,}8 \cdot (1-2 \cdot 9/14) = -0{,}8$.

Interessant ist auch der **Fall k = 3** mit dem Fixpunkt 2/3 und $g_3'(2/3) = 3 \cdot (1-2 \cdot 2/3) = -1$.

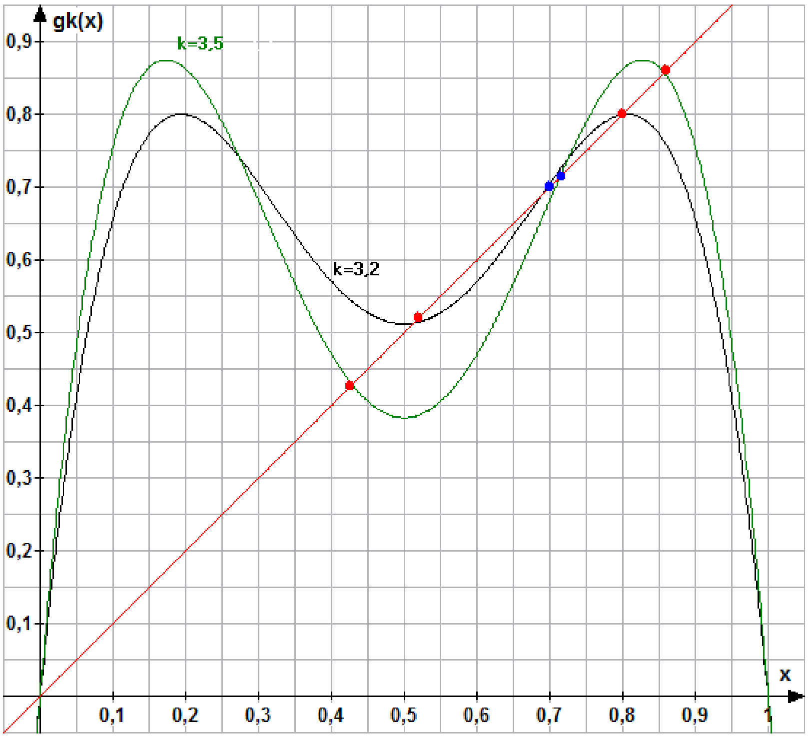
Obwohl die Steigung im Fixpunkt betraglich nicht < 1 ist, kann man hier eine (allerdings sehr langsame) <u>Konvergenz gegen diesen Fixpunkt 2/3</u> feststellen !

2. *Für welche k hat die Iteration mit g(x) = k·x·(1–x)* ***genau 2*** *Häufungswerte ?*
Man spricht in diesem Fall auch von **Zweierzyklen** !

Bei Zweierzyklen „springt" die Iteration zwischen 2 Werten hin und her. **g(g(x)) ≈ x** für große n.

Wir bilden zunächst g(g(x)) :
$g(g(x)) = k \cdot g(x) \cdot (1-g(x)) = k \cdot k \cdot x \cdot (1-x) \cdot (1-k \cdot x \cdot (1-x)) = k^2 \cdot x \cdot (1-x) \cdot (1-k \cdot x \cdot (1-x))$

Dies ist eine ganzrationale Funktion 4.Ordnung, die unten grafisch dargestellt wird (k=3,2 bzw. k=3,5) .



Man erkennt für jede der zwei Funktionen 3 Fixpunkte (abgesehen von x=0).
Anhand der Steigungsverhältnisse erkennt man ferner, dass eine Iteration mit x = g(g(x)) am jeweils mittleren Fixpunkt (blau) nicht konvergieren kann, wohl aber an den äußeren Fixpunkten (rot) .
Löst man die Gleichung x = g(g(x)) , so erhält man die Fixpunkte in Abhängigkeit vom Parameter k .
Da die Lösung x = 0 der obigen Gleichung für die Untersuchung unwichtig ist, können wir die Gleichung durch x dividieren und dann die Lösungen suchen :

Zu lösen ist dann (Unbekannte x):
$1 = k^2 \cdot (1-x) \cdot (1-k \cdot x \cdot (1-x))$

Dies löst man am besten mit einem CAS (z.B. Maxima oder TiNspire) exakt (siehe unten).

Ein CAS liefert für die verbleibende Gleichung
$1 = k^2 \cdot (1-x) \cdot (1-k \cdot x \cdot (1-x))$ bzw $k^3x^3 - 2k^3x^2 + k^2(k+1)x - k^2 + 1 = 0$ 3 Lösungen :

$\bar{x} = 1 - \frac{1}{k}$. Dies ist der jeweils mittlere der Fixpunkte, für den die Iteration aber <u>nicht konvergiert</u> .
Diesen brauchen wir daher im folgenden nicht mehr beachten !

Außerdem die Lösungen

$$\bar{x} = \frac{k+1+\sqrt{k^2-2k-3}}{2k} \quad \text{sowie} \quad \bar{x} = \frac{k+1-\sqrt{k^2-2k-3}}{2k}$$

<u>Anmerkung:</u>
Man kann erkennen, dass **jeder Fixpunkt von g(x) auch Fixpunkt von g(g(x))** ist !
Beweis: Sei z Fixpunkt von g(x). Dann gilt g(z) = z .
Setzt man dies in g(g(x)) ein, so erhält man: g(g(z)) = g(z) = z . Also ist g(g(z)) = z .

Für die beiden Lösungen von g(g(x)) = x ist jetzt noch die Bedingung |g(g(x))'| < 1 zu untersuchen .

Für die Ableitung liefert das CAS folgende Lösung : $g(g(x))' = k^2 \cdot (1-2x) \cdot (2kx^2 - 2kx + 1)$

Setzt man für x die obigen („interessanten") Fixpunkte ein, so erhält man in beiden Fällen:
$g(g(\bar{x}))' = 2(k+2) - k^2$ (Steigungen in den Fixpunkten in Abhängigkeit von k)

Die Bedingung $|g(g(x))'| < 1$ reduziert sich demnach zu $|4 + 2k - k^2| < 1$.
Dies lässt sich umformen:
$4 + 2k - k^2 < 1$, falls $4 + 2k - k^2$ gleichzeitig ≥ 0 ist **o d e r**
$-(4 + 2k - k^2) < 1$, falls $4 + 2k - k^2$ gleichzeitig ≤ 0 ist .

Es folgen weitere Äquivalenzumformungen :
$(k^2 - 2k - 3 > 0 \quad \wedge \quad k^2 - 2k - 4 \leq 0) \quad \vee \quad (k^2 - 2k - 5 < 0 \quad \wedge \quad k^2 - 2k - 4 \geq 0)$
Die erste Klammer liefert: $(k < -1 \ \vee \ k > 3) \wedge (1 - \sqrt{5} < k < 1 + \sqrt{5}) \quad \Leftrightarrow \quad 3 < k < 1 + \sqrt{5}$

Die zweite Klammer : $(1 - \sqrt{6} < k < 1 + \sqrt{6}) \wedge (k < 1 - \sqrt{5} \ \vee \ k > 1 + \sqrt{5})) \Leftrightarrow$
$1 + \sqrt{5} < k < 1 + \sqrt{6}$

Die ODER – Verknüpfung der beiden Klammern liefert das Ergebnis: $3 < k < 1 + \sqrt{6}$

<u>Zusammenfassung:</u>

Die Iteration mit $g(x) = k \cdot x\,(1 - x)$ besitzt <u>genau 2 Häufungspunkte</u> bzw.

„attraktive Zweierzyklen“ , wenn gilt : $\mathbf{3 < k < 1 + \sqrt{6} \approx 3{,}4495}$

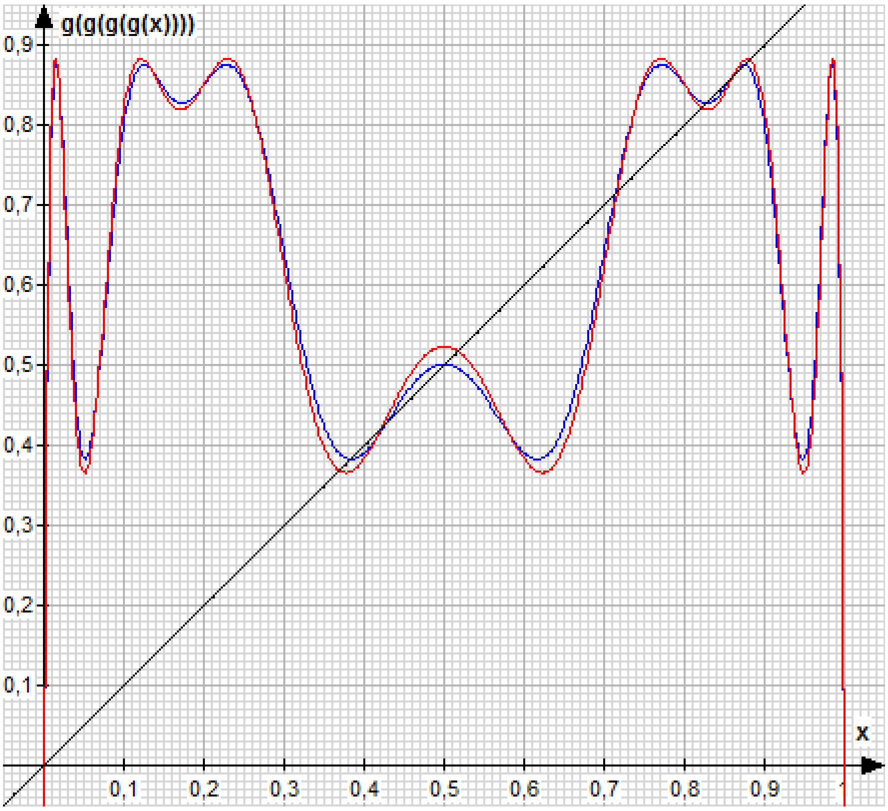
Die beiden Häufungswerte sind $\bar{x} = \dfrac{k + 1 + \sqrt{k^2 - 2k - 3}}{2k}$ **und** $\bar{x} = \dfrac{k + 1 - \sqrt{k^2 - 2k - 3}}{2k}$

3. *Für welche k hat die Iteration mit g(x) = k·x·(1–x)* ***genau 4*** *Häufungswerte ?*
Man spricht in diesem Fall auch von **Viererzyklen** !

Bei Viererzyklen „springt“ die Iteration zwischen 4 Werten hin und her. **g(g(g(g(x)))) ≈ x** für große n.

Wir lassen ein CAS zunächst g(g(g(g(x)))) mit g(x) = k·x·(1–x) bilden . Es entsteht ein gewaltiger Term (ganzrationale Funktion 16. Grades) :
g(g(g(g(x)))) = k^4x(1-x)(kx^2-kx+1)(k^3x^4-2k^3x^3+k^2x^2(k+1)-k^2x+1)(k^7x^8-4k^7x^7+2k^6x^6(3k+1)-2k^6x^5(2k+3)+k^4x^4(k^3+6k^2+k+1)-2k^4x^3(k^2+k+1)+k^3x^2(k^2+k+1)-k^3x+1)

Die Grafik zeigt die Funktion für k = 3,5 (blau) und k=3,53 (rot) sowie die Gerade mit y = x . Man erkennt für jeden der Graphen 8 Schnittstellen, von denen aber nur diejenigen bei x = 0,38 ; x = 0,5 ; x = 0,83 ; x = 0,88 für eine Konvergenzbetrachtung infrage kommen .



Rechnerisch liefert das CAS für g(g(g(g(x)))) = x insgesamt nur 4 reelle Lösungen :

$$\bar{x} = 0 \qquad \bar{x} = 1 - \frac{1}{k} \qquad \bar{x} = \frac{k+1+\sqrt{k^2 - 2k - 3}}{2k} \qquad \bar{x} = \frac{k+1-\sqrt{k^2 - 2k - 3}}{2k}$$

Diese sind allesamt bereits von g(g(x)) = x her bekannt und kommen für eine Lösung des Problems nicht in Betracht, weil an diesen Stellen der Graph zu steil ansteigt.

Für das Restpolynom 12. Ordnung
k^12·x^12 - 6·k^12·x^11 + 3·k^11·x^10·(5·k + 1) - k^9·x^9·(20·k^3 + 15·k^2 + 1) + 3·k^9·x^8·(5·k^3 + 10·k^2 + k + 2) - 2·k^8·x^7·(3·k^4 + 15·k^3 + 6·k^2 + 7·k + 1) + k^6·x^6·(k^6 + 15·k^5 + 18·k^4 + 17·k^3 + 10·k^2 + 1) - k^6·x^5·(3·k^5 + 12·k^4 + 12·k^3 + 18·k^2 + k + 4) + k^5·x^4·(3·k^5 + 5·k^4 + 14·k^3 + 4·k^2 + 6·k + 2) - k^3·x^3·(k^6 + 4·k^5 + 5·k^4 + 4·k^3 + 5·k^2 + 1) + k^3·x^2·(2·k^4 + k^3 + 4·k^2 + k + 2) - k^2·x·(k^3 + k^2 + k + 1)+ k^2 + 1
kann das CAS keine weiteren Nullstellen liefern.
Daher ist ein Nachweis der aus der Forschung bekannten Grenze k ≈ 3,54409 nicht möglich !

Das Feigenbaum-Diagramm lässt die Vermutung zu, dass sich in der Gegend von k = 3,84 ein **Dreierzyklus** befindet . Dies wollen wir jetzt abschließend untersuchen !

Für welche k hat die Iteration mit $g(x) = k\cdot x\cdot(1-x)$ ***genau 3*** *Häufungswerte ?*

Zu betrachten ist jetzt **g(g(g(x))) = x** .

Wir lassen ein CAS zunächst g(g(g(x))) mit $g(x) = k\cdot x\cdot(1-x)$ bilden . Dabei entsteht eine ganzrationale Funktion 8. Grades :

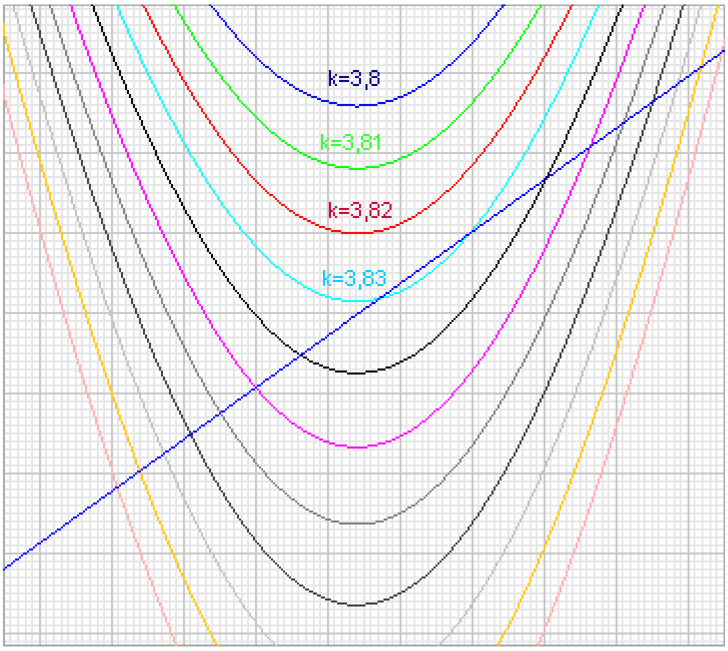
g(g(g(x))) = k^3·x·(1 - x)·(k·x^2 - k·x + 1)·(k^3·x^4 - 2·k^3·x^3 + k^2·x^2·(k + 1) - k^2·x + 1)

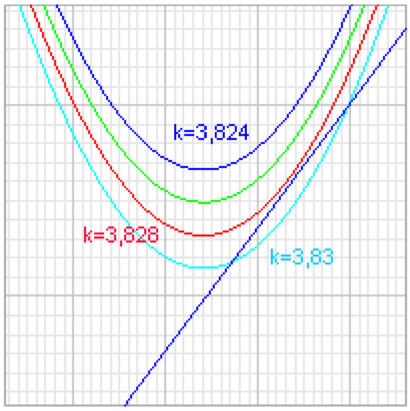
Die Bedingung g(g(g(x))) = x liefert auch wieder die 2 Fixpunkte 0 und 1 - 1/k , die sich schon bei g(x) ergeben hatten.

Das Restpolynom r = (g(g(g(x)))-x)/x/(x-1+1/k)/(-k) ist vom Grad 6:
r(x) = k^6·x^6 - k^5·x^5·(3·k + 1) + k^4·x^4·(k + 1)·(3·k + 1) - k^3·x^3·(k^3 + 5·k^2 + 3·k + 1) + k^2·x^2·(2·k^3 + 3·k^2 + 3·k + 1) - k·x·(k^3 + 2·k^2 + 2·k + 1) + k^2 + k + 1

Das CAS scheitert auch hier an der Nullstellenberechnung !

Daher betrachten wir eine Grafik mit g(g(g(x))) und x für die k-Werte 3,8 3,81 … 8,89 3,9 .
Wir suchen dasjenige k, für das g(g(g(x))) die Gerade x berührt (d.h. g(g(g(x)))' = 1)





Eine Berührende kann man sich bei ca. k=3,828 vorstellen .

Theorie: $k = 1 + \sqrt{8} \approx 3{,}828427$

Es gibt in der Nähe von k = 3,8 außerdem auch Bereiche mit 6, 12, etc. Häufungspunkten !

Fazit:

Innerhalb des Chaos-Bereichs (ab k = 3,8) gibt es noch "nichtchaotische" Iterationsergebnisse.

Bestimmen der Feigenbaum – Konstante

Der amerikanische Physiker Mitchell J. Feigenbaum fand in den 70er – Jahren eine Konstante δ , für die er folgenden Wert bestimmte :

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{k_n - k_{n-1}}{k_{n+1} - k_n} \approx 4{,}66920166091029$$

Hierbei sind die k_i aufeinanderfolgende Bifurkationspunkte (siehe unten) .

Interessant ist , dass diese Konstante für viele Iterationsfunktionen gültig ist , z.B. auch für $g(x) = x^2 - k$ oder $g(x) = k\,x^2 \sin(\pi\,x)$!

<u>Übungsbeispiel:</u> Näherungsweise Bestimmung der Konstante für $g(x) = k\,x\,(1 - x)$:

Die ersten Bifurkationspunkte seien im folgenden angegeben.
Zu berechnen sind zunächst die Differenzen aufeinanderfolgender Punkte :

$k_1 = 3{,}0$

$k_2 = 3{,}44948974...$	$k_2 - k_1 = d_1 \approx 0{,}44948974$
$k_3 = 3{,}544090...$	$k_3 - k_2 = d_2 \approx 0{,}09460026$
$k_4 = 3{,}564407...$	$k_4 - k_3 = d_3 \approx 0{,}020317$
$k_5 = 3{,}568759...$	$k_5 - k_4 = d_4 \approx 0{,}004352$
$k_6 = 3{,}569692...$	$k_6 - k_5 = d_5 \approx 0{,}000933$
$k_7 = 3{,}569891...$	$k_7 - k_6 = d_6 \approx 0{,}000199$

Schließlich berechnet man die Quotienten aufeinanderfolgender Differenzen, nämlich $\frac{d_k}{d_{k+1}}$:

$\frac{d_1}{d_2} \approx 4{,}75$	$\frac{d_2}{d_3} \approx 4{,}66$	$\frac{d_3}{d_4} \approx 4{,}67$	$\frac{d_4}{d_5} \approx 4{,}66$	$\frac{d_5}{d_6} \approx 4{,}69$

Man sieht, dass die Quotienten näherungsweise konstant sind !