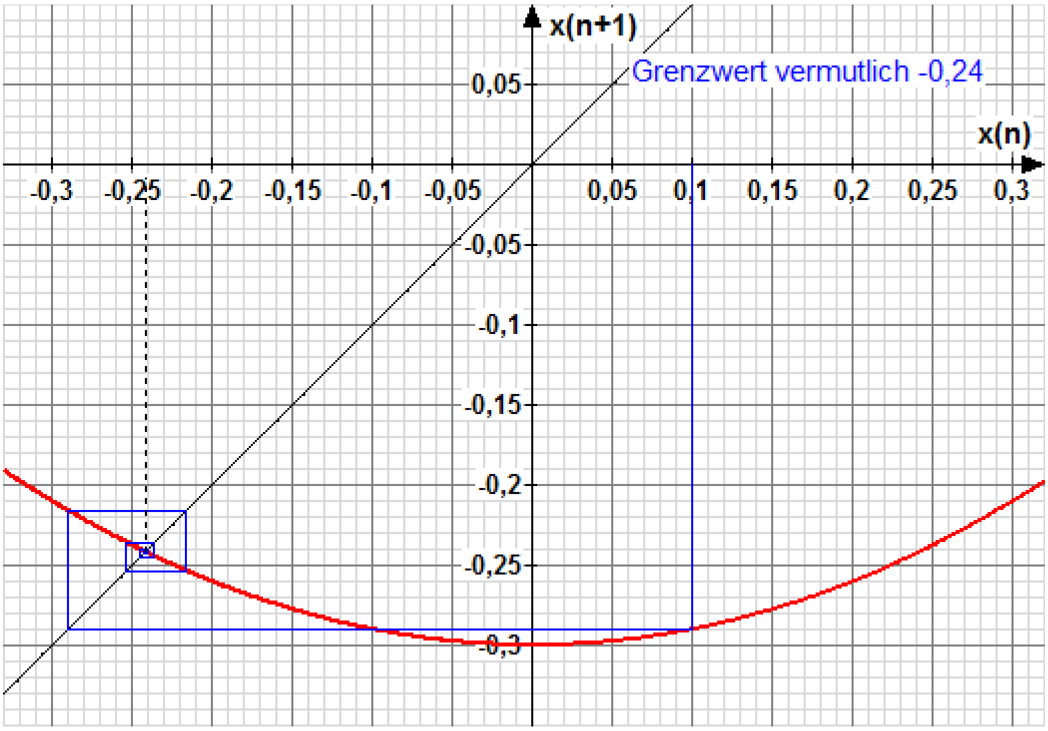
Einführung in die Chaostheorie (Teil 2) Ac 2018

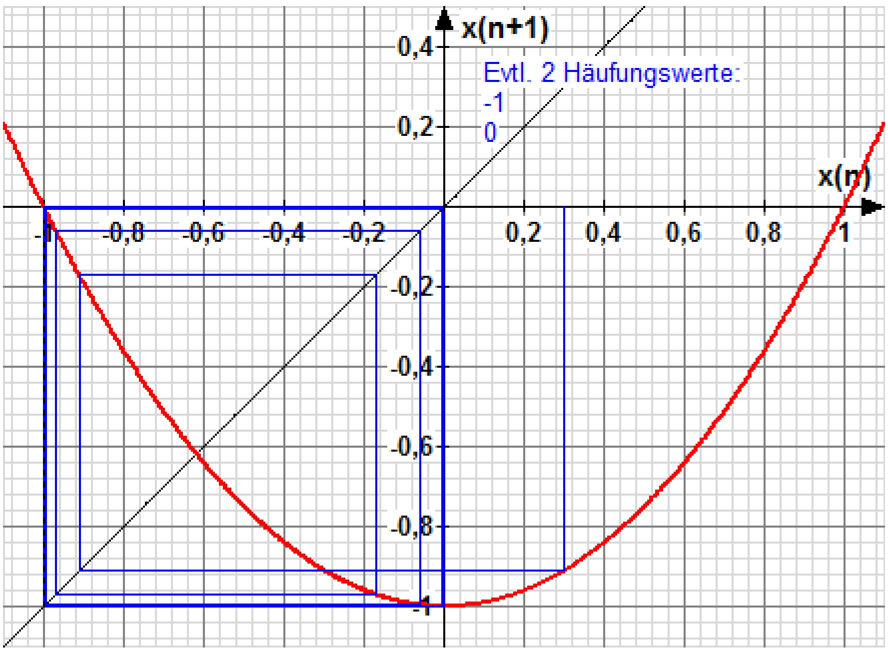
Iterationen an weiteren Funktionen

Iteration an der Funktion $g(x) = x^2 - k$

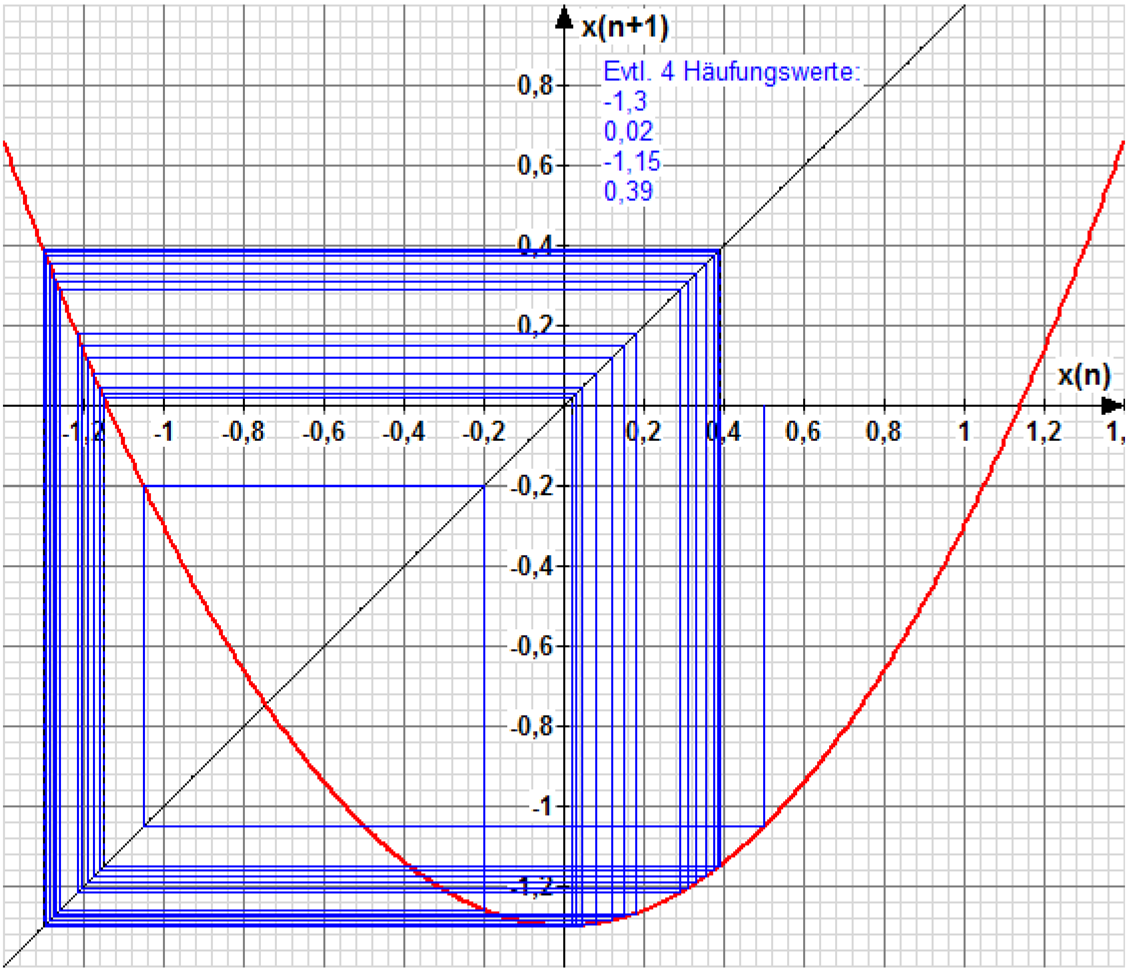
Beispiel 1: $g(x) = x^2 - 0{,}3$ (Grenzwert)



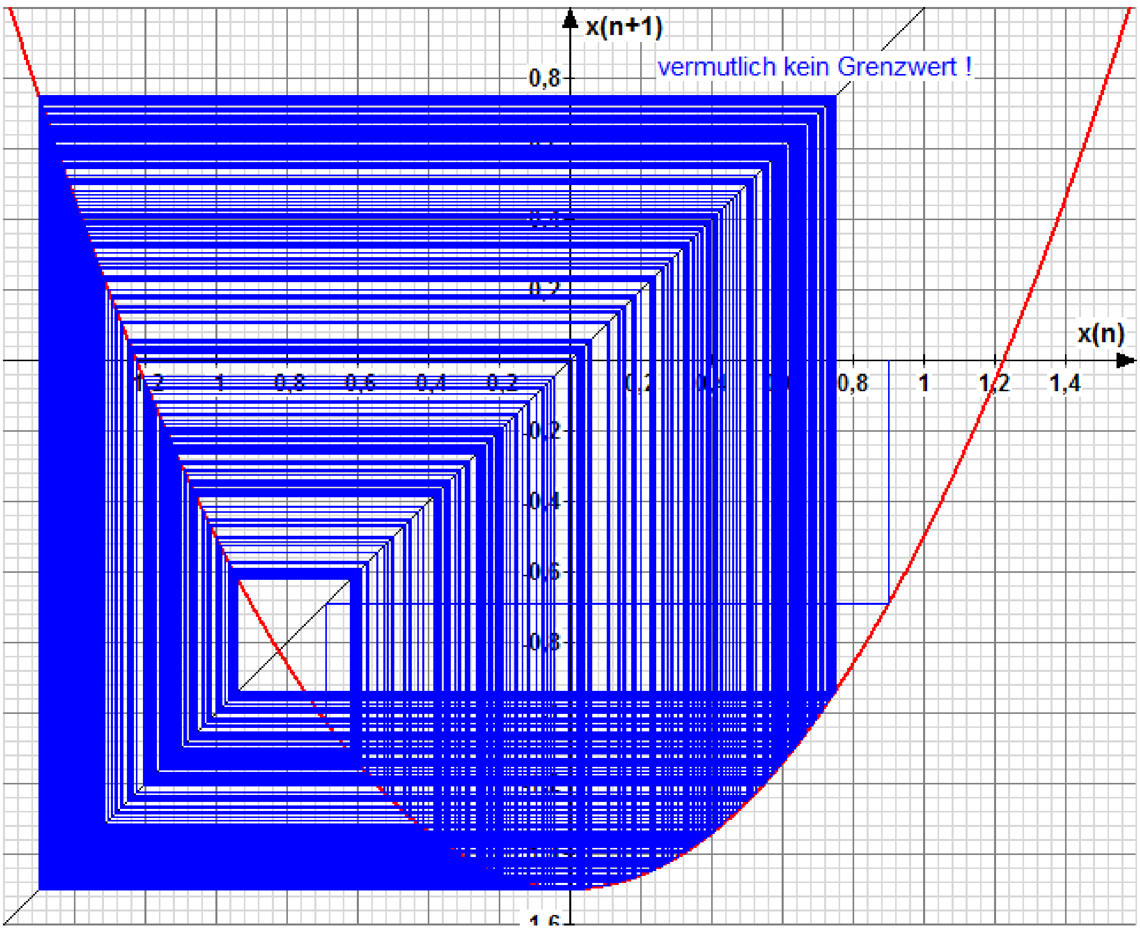
Beispiel 2: $g(x) = x^2 - 1$ (Zweierzyklus)



Beispiel 3: $g(x) = x^2 - 1{,}3$ (Vierfachzyklus)



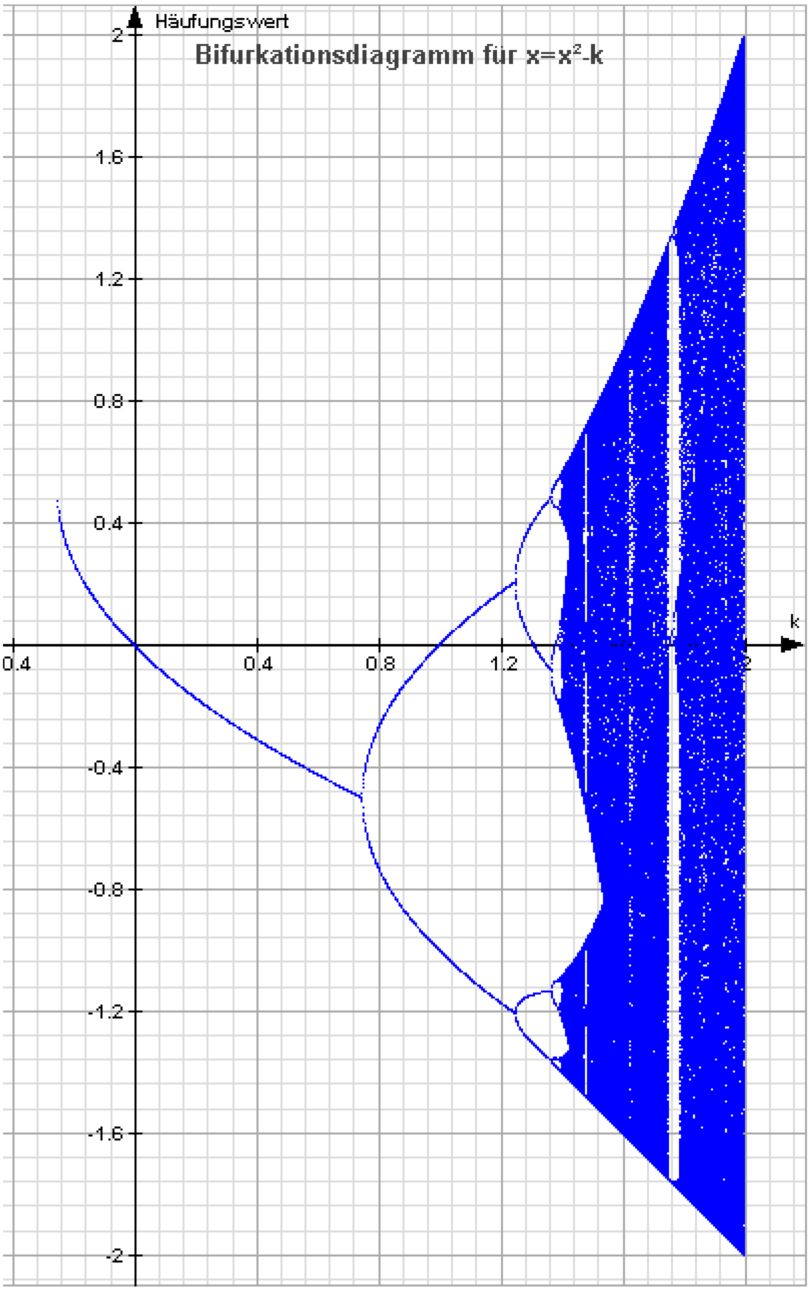
Beispiel 4: $g(x) = x^2 - 1{,}5$ (Mehrfachzyklus bzw. Chaos)



Für die Funktion $g(x) = x^2 - k$ ergeben sich ähnliche Bereiche wie bei der logistischen Gleichung .

$-0{,}25 < k < 0{,}75$	Die entsprechende Zahlenfolge besitzt einen Grenzwert
$0{,}75 < k < 1{,}25$	Die Folge besitzt 2 Häufungspunkte
$1{,}25 < k < 1{,}3...$	Die Folge besitzt 4 Häufungspunkte
$1{,}3... < k < 2$	Die Anzahl der Häufungspunkte nimmt zu

Das Bifurkationsdiagramm zu $g(x) = x^2 - k$:

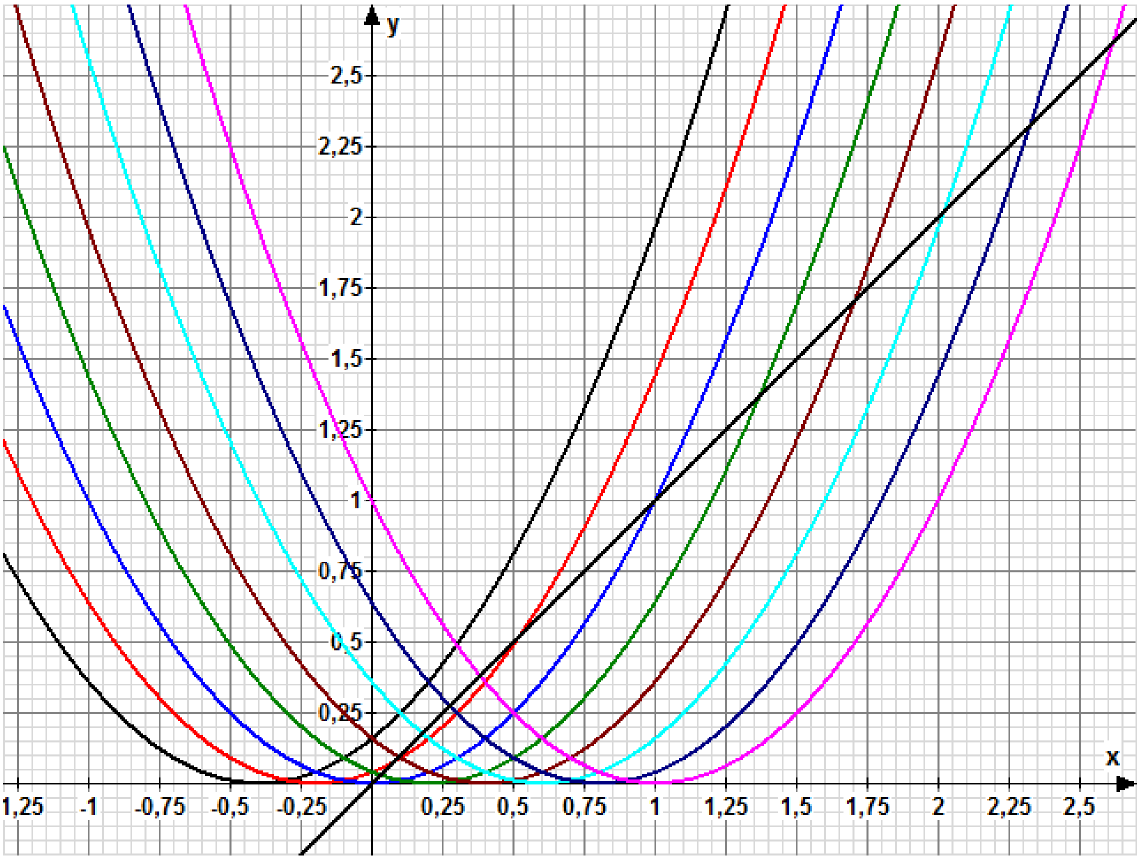


Iteration an der Funktion $f(x) = (x-k)^2$

Nachfolgend ist diese Kurvenschar für $k = -0,4$ bis $k = 1$ (Schrittweite 0,2) abgebildet:

Man erkennt, dass es für $k > 0$ immer 2 Fixpunkte (Schnittpunkte von f mit y=x) gibt, die aber nur für einige dieser k attraktiv (anziehend) sind. (Bei Attraktivität muss bekanntlich die Steigung in den Fixpunkten betraglich < 1 sein !)

Zwischen $k = -0,4$ (schwarze Kurve) und $k = -0,2$ (rote Kurve) muss es ein k mit nur einem Fixpunkt geben. Dort berührt der Graph also die Winkelhalbierende mit y=x !
Kleinere als dieses k führen zu gar keinem Fixpunkt !

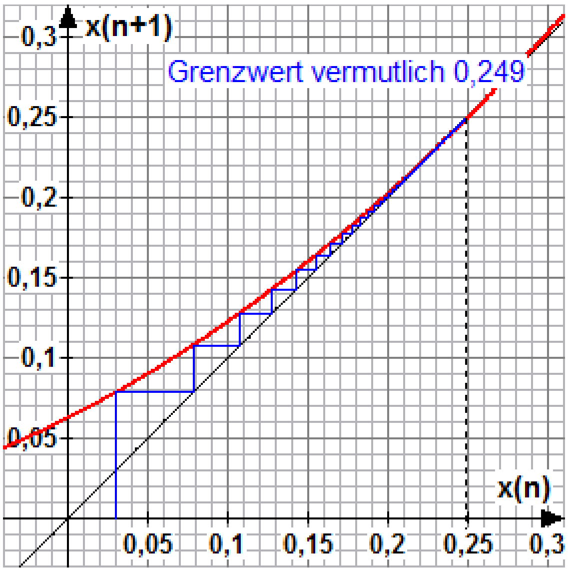


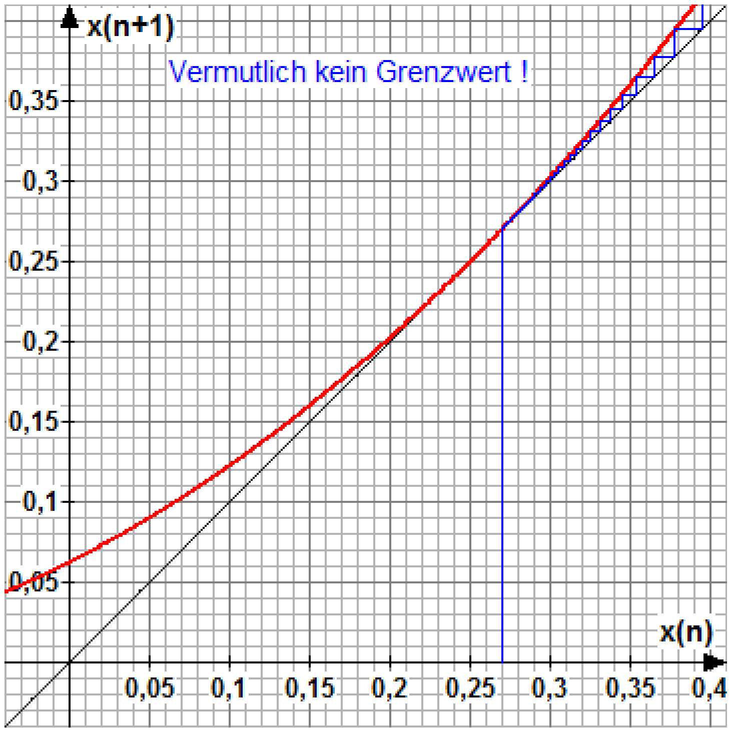
<u>Berechnung der Fixpunkte und der Anzahl der Fixpunkte:</u>
Aus dem Ansatz $x = f_k(x)$, d.h. $x = (x-k)^2$ folgt $x = x^2 - 2xk + k^2$ und $x^2 - (1+2k)x + k^2 = 0$,
woraus sich die folgenden Lösungen ergeben: $x_{1,2} = k + 0,5 \pm \sqrt{k+0,25}$
Für $k = -0,25$ gibt es genau <u>einen Fixpunkt</u> $x = k + 0,5$, da der Wurzelterm dann 0 ist .
Für $k < -0,25$ gibt es <u>keinen Fixpunkt</u>, da der Wurzelterm dann keine Lösung besitzt .
Für $k > -0,25$ gibt es <u>2 Fixpunkte</u> $x_{1,2}$ (siehe Lösungsformel oben) .

Zu untersuchen ist noch, welcher der Fixpunkte <u>attraktiv</u> ist, d.h. für welchen der Fixpunkte die Iteration $x_{n+1} = (x_n-k)^2$ zu Häufungswerten führt.
Eine Bedingung für die Existenz von Häufungswerten ist : $|f'(x)| < 1$
Für obige Funktion ist dies $|2(x-k)| < 1$, also $|x-k| < 0,5$.
Die Lösung dieser Ungleichung lautet $k-0,5 < x < k+0,5$.
x muss also kleiner als k+0,5 sein, daher scheidet die „+“-Lösung der obigen Lösungsformel aus.
Für die „-„-Lösung ergibt sich: $k-0,5 < x = k+0,5-\sqrt{k+0,25} < k+0,5$.
Subtrahiert man in der Gleichungskette (k-0,5), so erhält man: $0 < 1-\sqrt{k+0,25} < 1$.
Hieraus folgt $\sqrt{k+0,25} < 1$ oder $\sqrt{k+0,25} > 0$ und dann durch Quadrieren der Wurzel
$k+0,25 < 1$ oder $k+0,25 > 0$ bzw. $\mathbf{-0,25 < k < 0,75}$ (k-Intervall für Häufungswerte).

<u>Frage:</u> Gibt es für k = -0,25 ebenfalls Häufungswerte ??

Zur Klärung dieser Frage zeichnen wir das Cob-Web-Diagramm für $(x+0{,}25)^2$ mit verschiedenen Startwerten .





Ergebnis:

Bei Startwerten links vom Fixpunkt gibt es einen Häufungswert (sogar Grenzwert) , der identisch mit dem Fixpunkt x = 0,25 ist !

Startwerte, die größer als der Fixpunkt sind, führen zur Divergenz .

<u>Untersuchung von Zweierzyklen:</u>

Es gilt: $f(f(x)) = ((x-k)^2-k)^2$.
Wir suchen zunächst Fixpunkte, d.h. $x = ((x-k)^2-k)^2 \Leftrightarrow x = (x^2-2kx+k^2-k)^2 \Leftrightarrow$
$x = x^4 - 4kx^3 + (6k^2-2k)x^2 - 4k^2(k-1)x + (k^2-k)^2$.
Zu lösen ist daher die Gleichung $x^4 - 4kx^3 + (6k^2-2k)x^2 - (4k^3-4k^2+1)x + (k^2-k)^2 = 0$.

2 Lösungen sind bereits durch die Fixpunkte von f bekannt, nämlich die Lösungen von
$x = (x-k)^2$ bzw. . $(x-k)^2 - x = 0$ bzw. $x^2 - (2k+1)x + k^2 = 0$.
Eine Polynomdivision liefert dann die beiden anderen Lösungen:

Pol.div.: $(x^4 - 4kx^3 + (6k^2-2k)x^2 +(-4k^3+4k^2-1)x + (k^2-k)^2) : (x^2 + (-2k-1)x +k^2) = x^2+(-2k+1)x+(k-1)^2$

$x^4+(-2k-1)x^3+k^2x^2$

$0 \ +(-2k+1)x^3+(5k^2-2k)x^2+(-4k^3+4k^2-1)x$

$(-2k+1)x^3+(4k^2-1)x^2+(-2k^3+k^2)x$

$0 \qquad +(k^2-2k+1)x^2+(-2k^3+3k^2-1)x+(k^2-k)^2$

$(k-1)^2x^2+(-2k-1)(k-1)^2x+k^2(k-1)^2$

Rest = 0

Setzt man nun das Restpolynom Null, so ergeben sich die weiteren Lösungen:

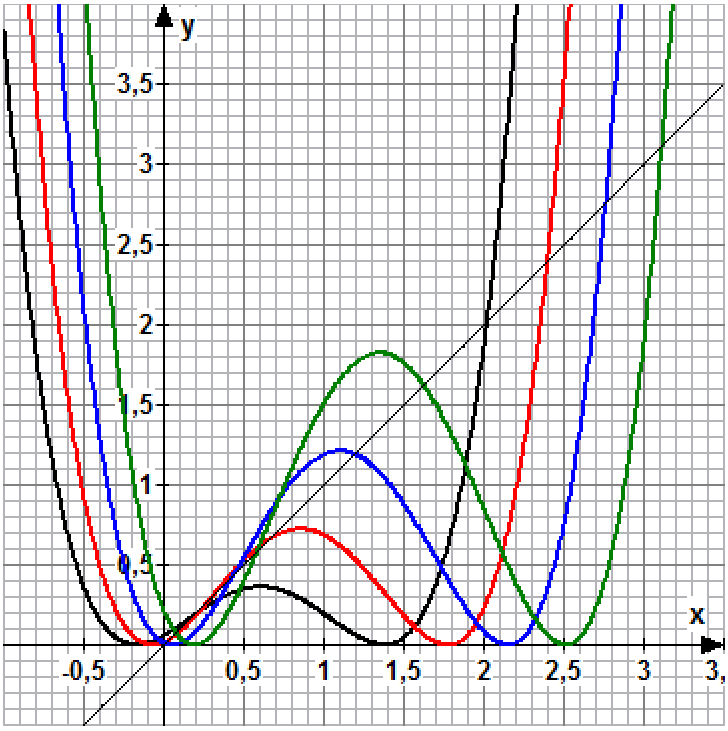
$x^2+(-2k+1)x+(k-1)^2 = 0$

Lösung: $x_{3/4} = k-0{,}5 \pm\sqrt{k^2-k+0{,}25-(k^2-2k+1)}$

Vereinfacht ergibt sich die Lösung: $x_{3/4} = k-0{,}5 \pm \sqrt{k-0{,}75}$

Anhand der Bedingung $|f(f(x))'| < 1$ lässt sich nun untersuchen, welcher der 2 Fixpunkte attraktiv ist, d.h. für welchen die entsprechende Iteration $x_{n+1} = f(f(x_n))$ Häufungswerte besitzt .

Zunächst die Grafen von $f_k(f_k(x)) = ((x-k)^2-k)^2$ für $k = 0{,}6 \;\; 0{,}85 \;\; 1{,}1 \;\; 1{,}35$:

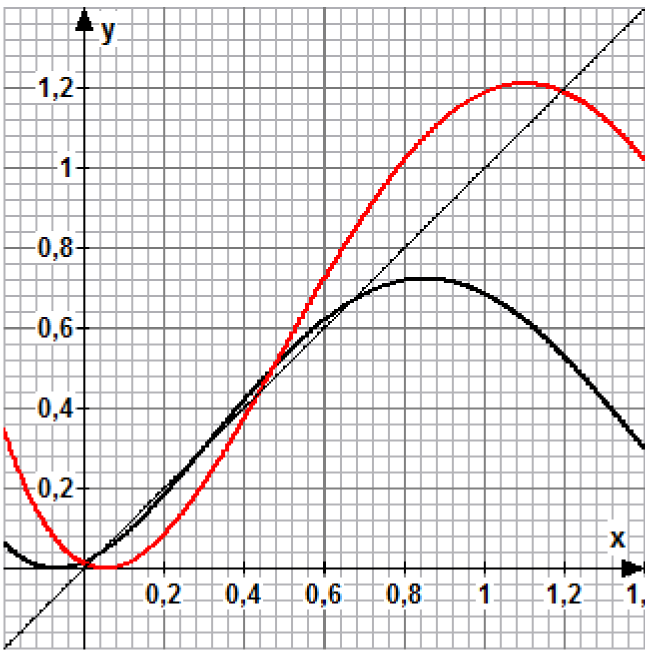


Nur für die Grafen mit $k = 0{,}85$ $k = 1{,}1$ und $k=1{,}35$ gibt es 4 Schnittpunkte mit der Winkelhalbierenden.

Für <u>k= 1,35</u> sind die Steigungen in den Schnittpunkten betraglich alle größer als 1, so dass hier keine Häufungswerte zu erwarten sind.
Für <u>k=0,6</u> gibt es nur 2 Schnittpunkte, die aber bereits Fixpunkte von f sind. Auch hier führt die Iteration daher nicht zu Häufungswerten !

Betrachte nun k=0,85 und k=1,1 :
Bei welchen der auftretenden 4 Schnittpunkte führt die Iteration zu Häufungswerten ?
(Steigung betrachten !)

Hier die vergrößerten Grafen von $((x-k)^2-k)^2$ für $k = 0{,}85$ und $k = 1{,}1$:



Man erkennt, dass jeweils in dem ersten und letzten Schnittpunkte die Steigung betraglich kleiner als 1 ist, so dass für jeden dieser k-Werte zwei Häufungswerte zu erwarten sind .

Nun die rechnerische Betrachtung:

Aus $|f(f(x))'| < 1$ folgt $|2((x-k)^2-k)\cdot 2(x-k)| < 1 \Leftrightarrow |((x-k)^2-k)(x-k)| < 0{,}25$

Es ist ratsam, jetzt nicht nach x aufzulösen (sehr schwieriger Term !), sondern die obigen Lösungen $x_{3,4} = k-0{,}5 \pm \sqrt{k-0{,}75}$ einzusetzen. Dann folgt:

$|((-0{,}5 \pm \sqrt{k-0{,}75})^2-k)(-0{,}5 \pm \sqrt{k-0{,}75})| < 0{,}25$ **Hierbei muss k > 0,75 vorausgesetzt werden !**

Formt man weiter um, so ergibt sich:

$|(0{,}25+k-0{,}75 \mp \sqrt{k-0{,}75} -k)(-0{,}5 \pm \sqrt{k-0{,}75})| < 0{,}25 \Leftrightarrow$

$|(-0{,}5 \mp \sqrt{k-0{,}75})(-0{,}5 \pm \sqrt{k-0{,}75})| < 0{,}25 \Leftrightarrow |0{,}25-(k-0{,}75)| < 0{,}25 \Leftrightarrow |1-k| < 0{,}25 \Leftrightarrow$

$1-k < 0{,}25$, falls $1-k \geq 0$

oder

$1-k > -0{,}25$, falls $1-k < 0$

Vereinfachen:

$k > 0{,}75$ und $k \leq 1$

oder

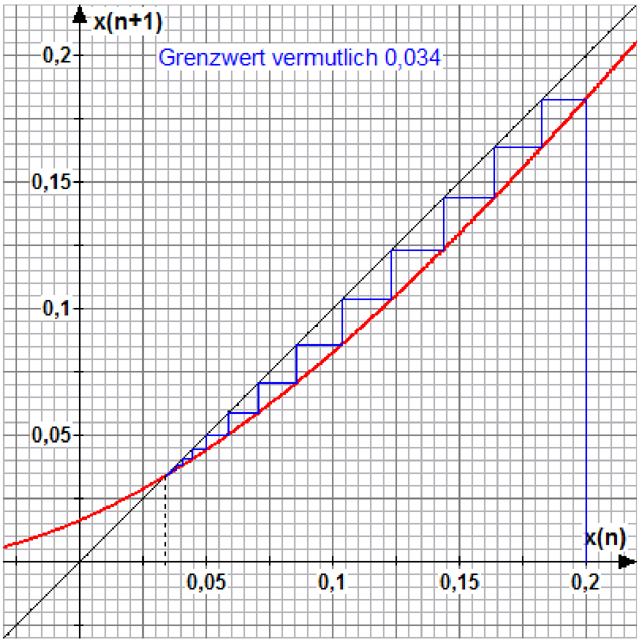
$k < 1{,}25$ und $k > 1$

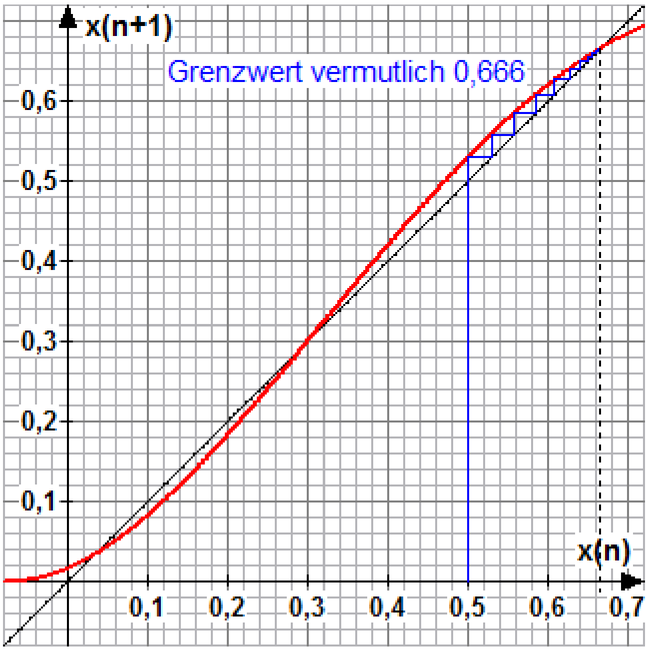
Dies liefert: $0{,}75 < k \leq 1$ oder $1 < k < 1{,}25$

Was sich auch so schreiben lässt : **$0{,}75 < k < 1{,}25$**

In diesem k-Intervall gibt es die beiden Häufungswerte x_3 und x_4 !

Cob-Web-Diagramme für $((x-k)^2-k)^2$ mit $k = 0{,}85$ (Startwerte 0,2 bzw. 0,5) :

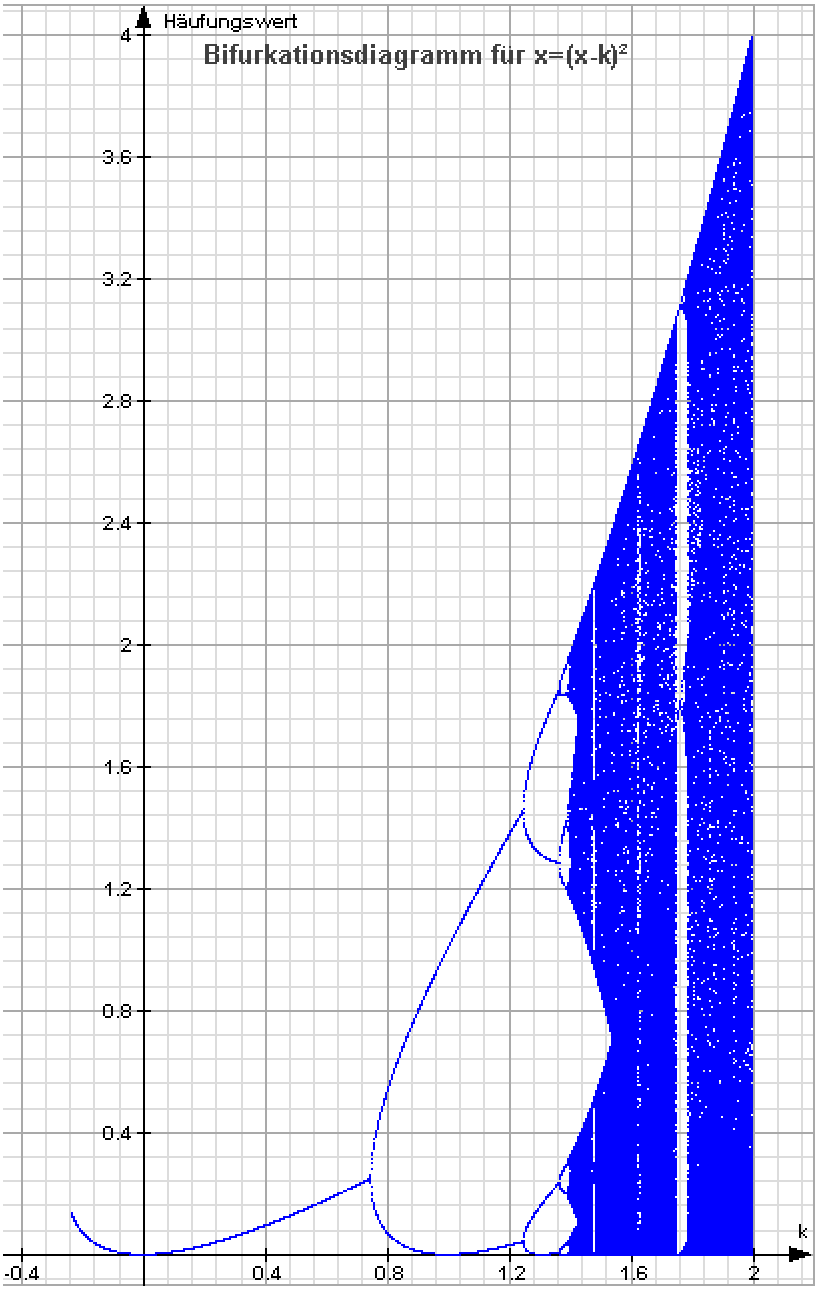




Die theoretisch errechneten Werte sind: $x_{3,4}$ = **0,85 - 0,5** $\pm\sqrt{0{,}85-0{,}75}$

Also **x3 = 0,033772234...** und **x4 = 0,666227766...** ,
was vom Computerprogramm auch gut bestätigt wird !

Feigenbaumdiagramm für die Iterationsfunktion $f_k(x) = (x - k)^2$



Zum Schluss noch ein weiteres Diagramm mit einer recht komplizierten Iterationsfunktion: