Folgen – explizit und rekursiv Ac 2013 - 2018

Folgen sind **Funktionen** , bei denen natürliche Zahlen n (0; 1; 2; …) reellen Zahlen a(n) zugeordnet werden. Man schreibt dafür : n →a(n) bzw. n →a_n . Für die Folge schreibt man auch < a_n > . Folgen können **explizit** (**iterativ**) oder **rekursiv** definiert werden. **Grafisch** stellt man Folgen als Punkte im Koordinatensystem dar (Rechtsachse n , Hochachse a_n) . Ferner gibt es eine sog. **Cob-Web-Darstellung**, die Aufschluss darüber gibt, ob die Folge sich bei größer werdendem n auf einen endlichen oder unendlichen Wert zubewegt, d.h. ob sie **konvergiert** oder **divergiert** .

Folgen können **beschränkt** sein (nach oben; nach unten; beides) oder **monoton** (fallend; steigend) . Diese Eigenschaften kann man auch algebraisch beweisen.

Beispiele für explizit definierte Folgen :

$a_n = \frac{1}{2n}$ $\qquad a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{1}{4} \quad a_3 = \frac{1}{6} \quad a_4 = \frac{1}{8} \quad ...$

$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ $\qquad a_1 = -1 \quad a_2 = \frac{1}{4} \quad a_3 = -\frac{1}{9} \quad a_4 = \frac{1}{16} \quad ...$

$a_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ $\qquad a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 6 \quad a_4 = 24 \quad ...$

$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ $\qquad a_1 = 2 \quad a_2 = 2{,}25 \quad a_3 = \frac{64}{27} \approx 2{,}37 \quad a_4 = \frac{625}{256} \approx 2{,}441 \quad ...$

$a_n = (1 - \frac{1}{n})^{-n}$ $\qquad a_2 = 4 \quad a_3 = \frac{27}{8} = 3{,}375 \quad a_4 = \frac{256}{81} \approx 3{,}16 \quad a_5 = \frac{3125}{1024} \approx 3{,}05 \quad ...$

Beispiele für rekursiv definierte Folgen :

$a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n \ ; \ a_0 = 1$ n Fakultät
1 1 2 6 24 120 720

$a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n + 2 \ ; \ a_0 = 1$ strebt langsam gegen 6
1 8/3 34/9 122/27 406/81 1298/243 4054/729

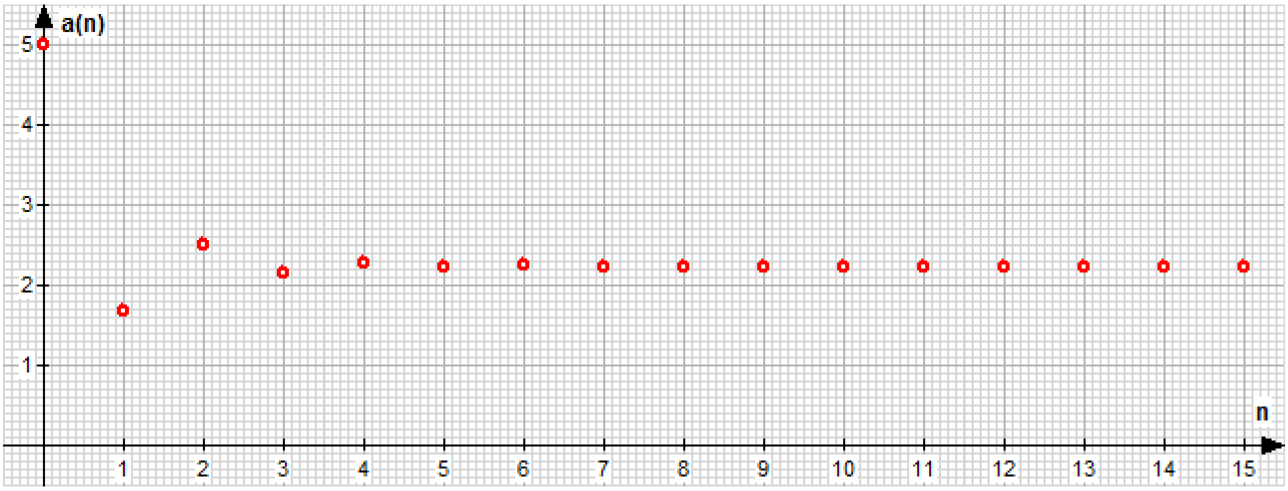
$a_{n+1} = (1 + \frac{2{,}5}{100}) a_n \ ; \ a_0 = 2000$ Zinseszinsen mit 2,5% p.a. und Startkapital 2000
2000 2050 2101,25 2153,78... 2207,62... 2262,81... 2319,38...

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ ; \ a_1 = 1; a_2 = 1$ (Fibonacci-Folge)
1 1 2 3 5 8 13 21 34

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ ; \ a_1 = 1; a_2 = 2$ (Lucas-Folge)
1 2 3 5 8 13 21 34 55

Kompliziertere Beispiele :

(1) $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 5}{a_n + 1}$; $a_0 = 5$ *strebt gegen* $\sqrt{5} \approx 2{,}236$ (siehe Grafik)



(2) $a_{n+2} = 111 - \dfrac{1130 - 3000/a_n}{a_{n+1}}$; $a_0 = \dfrac{11}{2}$, $a_1 = \dfrac{61}{11}$ (von Jean-Michel Muller,1989)

Vorsicht: Bei der Berechnung mit einem Computer gibt es grobe Rundungsfehler, die zu teils völlig falschen Ergebnissen führen. Die Folge strebt übrigens gegen 6.

Computerwerte: $a_2 = 5{,}59$ $a_5 = 5{,}71$ $a_{10} = 5{,}86$ $a_{16} = 5{,}05$ $a_{17} = -11{,}7$ (völlig falsch !)

Ihre explizite Darstellung ist $a_{n+1} = \dfrac{6^{n+1} + 5^{n+1}}{6^n + 5^n}$

(3) $a_{n+1} = 3{,}8 \cdot a_n \cdot (1 - a_n)$; $a_0 = 0{,}2$ „Chaos-Folge“

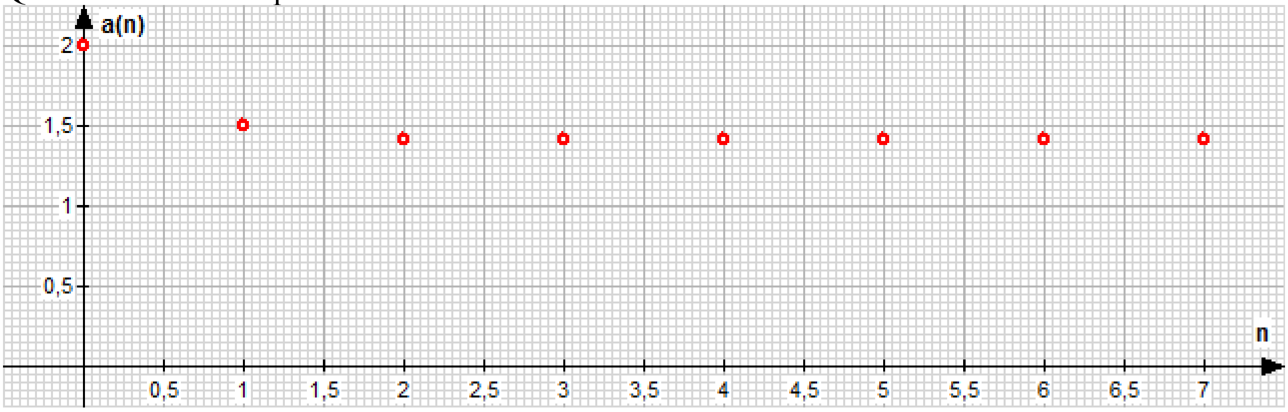
Auch hier gibt es numerische Probleme !

Computerwerte: $a_1 = 0{,}608$ $a_5 = 0{,}528...$ $a_{10} = 0{,}275...$ $a_{50} = 0.500...$ (korrekt: 0.498)
$a_{80} = 0{,}475...$ (korrekt: 0,703) $a_{100} = 0{,}658...$ (korrekt: 0,344) $a_{200} = 0{,}756...$ (korrekt: 0,569)

Genauere Betrachtungen einiger bekannten Folgen :

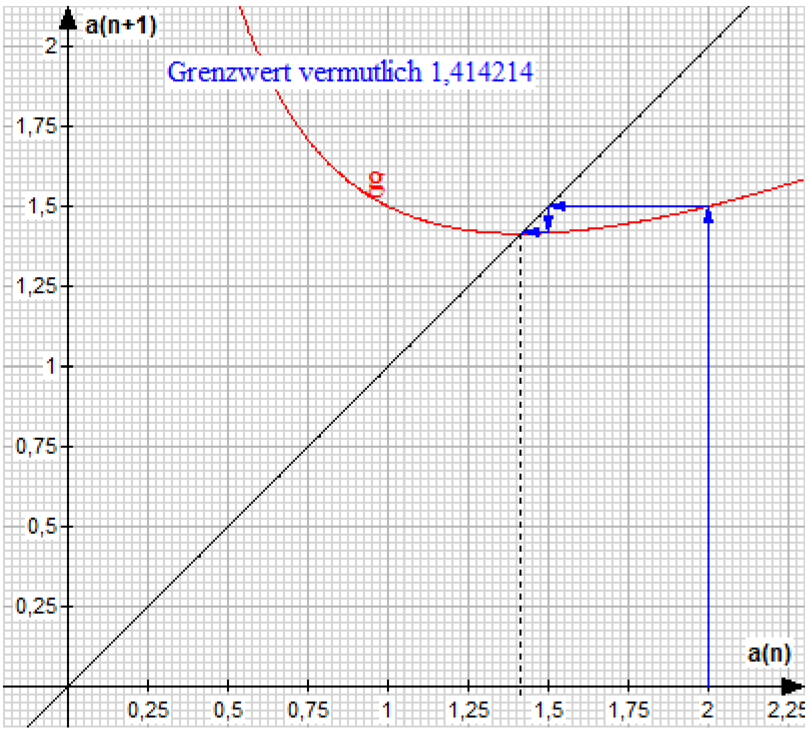
Heron-Folge

Besonders berühmt ist die „**Heron-Folge**“ $\boxed{a_{n+1} = (a_n + \frac{r}{a_n}) / 2; \quad a_0 = r}$ zur Berechnung der Quadratwurzel einer positiven reellen Zahl r. Hier eine Grafik für r = 2.



Die rasche Konvergenz gegen ca. 1,4 ist auffällig .

Dieses Konvergenzverhalten sei noch am **Cob-Web-Diagramm** (bzw. Web-Diagramm) betrachtet :
Web-Diagramme können nur bei rekursiven Folgen erstellt werden, bei denen a(n+1) ausschließlich von a(n) abhängt. Hängt a(n+1) von a(n-1) und a(n) ab, wie es bei der Fibonacci-Folge der Fall ist, so ist ein Web-Diagramm nicht möglich !!
Beim Web-Diagramm wird auf der Rechtsachse stets a(n) und auf der Hochachse a(n+1) eingetragen.
Also: Für jedes Folgenglied a(n) erhält man als Funktionswert g das Folgenglied a(n+1).
Dieser Funktionswert g wird gemäß der rekursiven Vorschrift berechnet bzw. erzeugt.
Im Fall der Heron-Folge ist g = (a(n) + r / a(n)) / 2 (*) . Dies ist eine Hyperbel .
Wir brauchen daher im a(n)-a(n+1)-Diagramm eine Hyperbel mit der Gleichung (*) .
Zusätzlich zeichnen wir noch die Winkelhalbierende des ersten Quadranten mit der Gleichung a(n+1) = a(n) ein. Der Sinn dieser Geraden ergibt sich aus der Konstruktionsvorschrift (siehe unten).



Konstruktionsvorschrift für die Web-Grafik:

1) Startwert a(0) auf der Rechtsachse suchen und von dort einen senkrechten Pfeil zeichnen bis zum Graphen der Funktion g .

2) Von dort aus einen waagerechten Pfeil ziehen bis zur Winkelhalbierenden .

3) Von dort aus einen senkrechten Pfeil zeichnen bis zum Grafen von g .

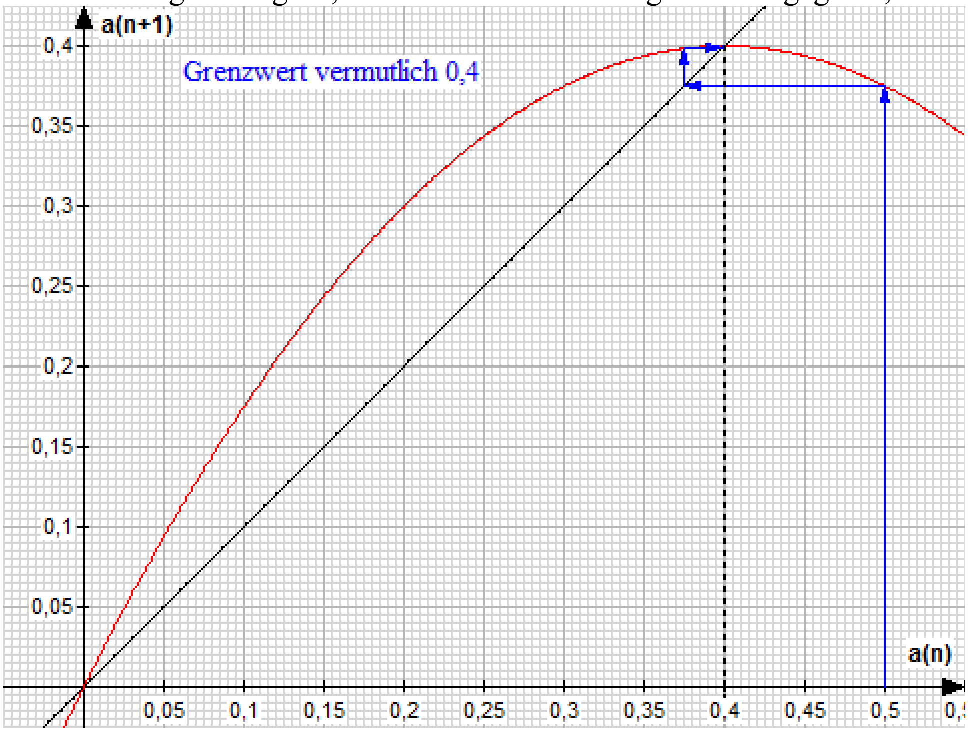
4) Schritte 2) und 3) mehrmals wiederholen .

Anmerkung: Für die k-te Wurzel einer Zahl r gilt: $\boxed{a_{n+1} = ((k-1) \cdot a_n + \frac{r}{a_n^{k-1}}) / k; \quad a_0 = r}$

<u>Kehrwert 1 / r</u>

Zur Berechnung des **Kehrwertes** einer reellen positiven Zahl r seien 2 verschiedene Folgen betrachtet:
(1) $\mathbf{a_{n+1} = (1 - r) \cdot a_n + 1}$; $a_0 = 0{,}5$, falls r > 1 ; 2 sonst
(2) $\mathbf{a_{n+1} = (2 - r \cdot a_n) \cdot a_n}$; $\mathbf{0 < a_0 < 3/2r}$

Beispiel r = 2,5 $a_0 =$ 0,5 < 3/5 : (Kehrwert = 0,4)
Die erste Folge divergiert, während die zweite Folge schnell gegen 0,4 konvergiert (s. Grafik).



<u>Anmerkungen :</u>

Für 0 < r < 2 konvergiert auch (1), jedoch recht langsam !

Für r = 9 und $a_0 = 0{,}1$ erzeugt (2) ein besonders schönes Zahlenmuster (!), nämlich
0,1 0,11 0,1111 0,11111111 0,1111111111111111 usw.

<u>McCarthy-Folge bzw. Ulam-Folge bzw. Collatz-Folge :</u>

Ein bisher in der Mathematik noch ungelöstes Problem:

Es sei a_1 eine beliebige natürliche Zahl.
Ist a_1 gerade, so ist $a_2 = 0{,}5a_1$.
Ist a_1 ungerade, so ist $a_2 = 3a_1 + 1$.
Analog werden die weiteren Folgenglieder gebildet.

Zu untersuchen ist, ob für jeden Startwert a_1 die Folge schließlich in den Zyklus (4,2,1) mündet .

<u>Beispiele:</u>

57 172 86 43 130 65 196 98 49 148 74 37 112 56 28 14 7 22 11 34 17 52 26 13 40 20 10 5 16 8 4 2 1

100 50 25 76 38 19 58 29 88 44 22 11 34 17 52 26 13 40 20 10 5 16 8 4 2 1

997 2992 1496 748 374 187 562 281 844 422 211 634 317 952 476 238 119 358 179 538 269 808 404 202 101 304 152 76 38 19 58 29 88 44 22 11 34 17 52 26 13 40 20 10 5 16 8 4 2 1

ARCHIMEDES-Approximation der **Zahl π**

Einem Einheitskreis werden nacheinander 6-Eck, 12-Eck, 24-Eck, usw. einbeschrieben. Der halbe Umfang (U/2) eines jeden n-Ecks ist eine Näherung für π . Für das 6-Eck ergibt sich auf einfache Weise die Näherung 3 für π , denn die Seitenlänge s_6 beträgt 1 . Die Seitenlängen der anderen Vielecke lassen sich aufgrund elementargeometrischer Beziehungen (Pythagoras) rekursiv aus den jeweils vorhergehenden n-Ecken berechnet. Bezeichnet man die Seitenlänge des n-Ecks mit s_n , so ist s_{2n} die Seitenlänge des 2n-Ecks. Es gilt folgende Rekursionsformel :

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}\ , \text{ mit } s_6 = 1 \qquad \text{(ARCHIMEDES-Approximation)}$$

Multipliziert man nun die jeweiligen Seitenlängen s_n mit der halben Eckenzahl (n/2), so erhält man immer bessere Näherungszahlen für π , d.h. $\pi \approx n / 2 \cdot s_n$.

Tabelle:

n	s_n	$n / 2 \cdot s_n$
6	1	3
12	0,517638090205	3,1058...
24	0,26105238444	3,1326...
48	0,13080625846	3,1393...
96	0,065438165644	3,1409...
192	0,032723463253	3,1414...
384	0,016362279208	3,14155...
…	…	
6442450944	0,00000000098781676	
12884901888	0,00000000046566129 →	**3,000000017...**

Beachten muss man hierbei, dass bei größer werdender Eckenzahl eine Auslöschung der Stellen durch Subtraktion („Subtraktionskatastrophe“) auftritt (s. Ergebnis oben), die man aber durch Umstellen der Rekursionsformel beheben kann.

Umstellen kann man durch Erweitern von $\sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$ mit $\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}$, was folgende äquivalente (und numerisch stabilere !) Rekursionsformel liefert: $s_{2n} = \dfrac{s_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}$

Anmerkung: Selbstverständlich liefert der Rechner nach einiger Zeit auch bei der verbesserten Formel für s_n den Wert 0 (Gleitkommaunterlauf !) , weil die Werte betraglich immer kleiner werden .

n	s_n	$n / 2 \cdot s_n$
6	1	
12	0,517638090205	
24	0,26105238444	
48	0,13080625846	
96	0,065438165644	
192	0,032723463253	
384	0,016362279208 →	3,14155...
…	…	
6442450944	0,00000000097527872	
12884901888	0,0000000048763936 →	**3,14159265...**

<u>Untersummenfolgen :</u>

Die nachfolgend definierten Untersummenfolgen $\underline{S_n}$ lassen sich alle geometrisch deuten als Summen von Flächeninhalten <u>nebeneinanderliegende Rechtecke</u> mit der Breite 1/n .

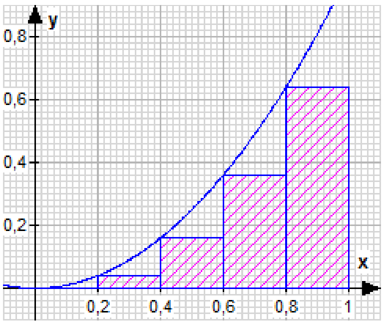
a) $\underline{S_n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n} \cdot [\left(\frac{0}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2]$

b) $\underline{S_n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^3 = \frac{1}{n} \cdot [\left(\frac{0}{n}\right)^3 + \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^3]$

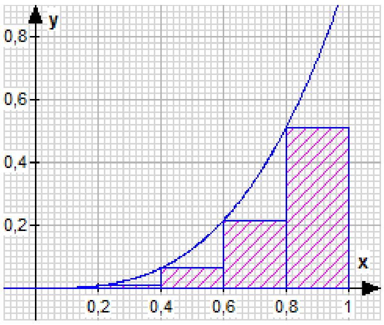
c) $\underline{S_n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \cdot [\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{3}{n}\right)^2} + \ldots + \sqrt{1-\left(\frac{n}{n}\right)^2}]$

<u>Beispiel :</u> n = 5

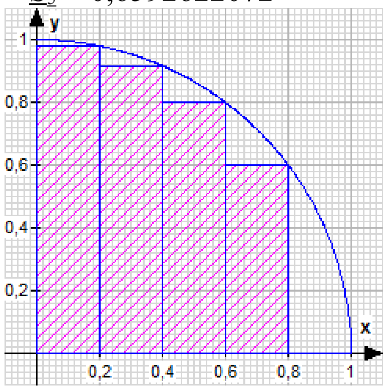
$\underline{S_5} = 0{,}24$



$\underline{S_5} = 0{,}16$



$\underline{S_5} \approx 0{,}6592622072$



Lässt man n gegen Unendlich streben, so ergibt sich jeweils ein Grenzwert :

n	a)	b)	c)
50	0,3234	0,2401	0,7745671277
100	0,32835	0,245025	0,7801042579
1000	0,3328335000	0.2495002500	0,7848888667
10^6	0,3333328333	0,2499995	0,7853976639
Grenzwert	1/3 ≈ 0,333333333	¼ = 0,25	π /4 ≈ 0,7853981667

<u>Anmerkung :</u>

Die drei Grenzwerte sind Integrale über dem Intervall [0;1] für die 3 Funktionen

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Arithmetische Folgen und Reihen :

Bei einer **arithmetischen Folge** sind die Differenzen benachbarter Glieder immer konstant,
also $\boxed{a_{n+1} - a_n = d}$ bzw. $\boxed{a_{n+1} = a_n + d}$. Explizit gilt: $\boxed{a_n = a_0 + n \cdot d}$

Beispiel: 0 5 10 15 20 25 … , also $a_n = 0 + n \cdot 5 = 5n$

Bei einer **arithmetischen Reihe** s werden die Glieder einer arithmetischen Folge (unendlich oft) summiert.
Da die Glieder immer gleich groß sind, kann eine arithmetische Reihe **nicht konvergieren**.

Wir beschränken uns daher auf die **n-te Partialsumme s_n** : $\boxed{s_n = \sum_{k=0}^{n} (a_0 + k \cdot d)}$.

Umgeformt: $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_0 + \sum_{k=0}^{n} k \cdot d = (n+1) \cdot a_0 + d \cdot \sum_{k=0}^{n} k$

Wegen $\sum_{k=0}^{n} k = n \cdot \frac{n+1}{2}$ ist dann $\boxed{s_n = (n+1) \cdot a_0 + d \cdot n \cdot \frac{n+1}{2}}$

Beispiel: 0 + 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + … + 5n = $(n+1) \cdot 0 + 5 \cdot n \cdot \frac{n+1}{2} = 2{,}5 \cdot n \cdot (n+1)$

Für z.B. n = 100 erhält man $s_n = 25250$.

Ebenso berechnet man 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + … + 100 = 5050 (berühmtes Beispiel von C.F. Gauß)

Geometrische Folgen und Reihen :

Bei einer **geometrischen Folge** sind die Quotienten benachbarter Glieder immer konstant,

also $\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = q}$ bzw. $\boxed{a_{n+1} = a_n \cdot q}$. Jedes Glied ist ein konstantes Vielfaches des Vorhergehenden .

Explizit gilt: $\boxed{a_n = a_0 \cdot q^n}$

Beispiel: Zinseszinsen mit Zinssatz = 5% p.a.
Anfangskapital K_0 = 2000 €

Das Kapital K entwickelt sich nach 1;2;3;t Jahren folgendermaßen:
$K(1) = 2000 + 2000 \cdot 5/100 = 2000 \cdot (1+5/100)$
$K(2) = 2000 \cdot (1+5/100) + 2000 \cdot (1+5/100) \cdot 5/100 = 2000 \cdot (1+5/100)^2$
$K(3) = 2000 \cdot (1+5/100)^2 + 2000 \cdot (1+5/100)^2 \cdot 5/100 = 2000 \cdot (1+5/100)^3$

Allgemein gilt die Zinseszinsformel $\mathbf{K(t) = K_0 \cdot (1 + p/100)^t}$

Für das Beispiel ist $K(t) = 2000€ \cdot 1{,}05^t$. Der Quotient ist hier $\frac{K_{n+1}}{K_n} = 1{,}05$

Bei einer **geometrischen Reihe** s werden die Glieder einer geometrischen Folge (unendlich oft) summiert.

Es gilt also $\boxed{s = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \cdot q^k}$. Für $q \neq 1$ gilt dann: $\boxed{s = \lim_{n\to\infty} a_0 \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k}$ bzw. $\boxed{s = a_0 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q};\ q \neq 1}$

Für $|q|<1$ ist die Reihe **konvergent.** s heißt dann **die Summe der Reihe** und es gilt : $\boxed{s = \frac{a_0}{1-q}\ ;\ |q|<1}$

Beispiel: $s = 3 + 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} 3 \cdot 0{,}1^k = \frac{3}{0{,}9} = 3{,}\overline{3}$

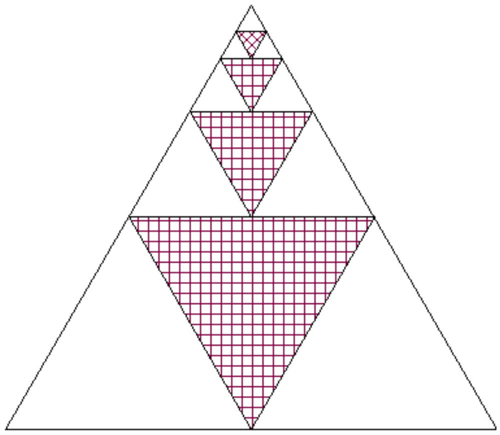
Was ändert sich, wenn die geometrische Reihe mit dem Summenindex k=1 beginnt ??

$$s = \lim_{n\to\infty} a_0 \cdot \sum_{k=1}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} a_0 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} q^k - q^0\right) = a_0 \cdot \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} - 1\right) = a_0 \cdot \frac{q-q^{n+1}}{1-q}$$

Für eine **konvergente** Reihe gilt dann $\boxed{s = a_0 \cdot \frac{q}{1-q}\ ;\ |q|<1}$

Beispiel: $s = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot 0{,}1^k = 3 \cdot \frac{0{,}1}{0{,}9} = 0{,}\overline{3}$

Summe von Flächeninhalten im gleichseitigen Dreieck (geom. Reihe):



Der Flächeninhalt des großen gleichseitigen Dreiecks sei A = 1 . Die Konstruktion der immer kleiner werdenden Teildreiecke unter Verwendung von Seitenmitten sei unendlich oft fortgesetzt .

Man sieht auf Anhieb, dass alle schraffierten Dreiecke jeweils links und rechts von zwei kongruenten Dreiecken umgeben sind. Sie machen daher alle 1/3 des Flächeninhalts der drei Dreiecke auf einer „Höhe“ aus.
Daher kann man auf einen Gesamtflächeninhalt der schraffierten Dreiecke von 1/3 schließen.

Analytische / rechnerische Betrachtung:

$A_1 = \frac{1}{4}$, weil 4 gleichgroße Dreiecke in das äußere Dreieck passen.

Ebenso schließt man:

$A_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = (\frac{1}{4})^2$
$A_3 = \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{4})^2 = (\frac{1}{4})^3$
$A_4 = \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{4})^3 = (\frac{1}{4})^4$

Allgemein: $\mathbf{A_n = (\frac{1}{4})^n}$

Bildet man die Folge s(n) , die aus den Teilsummen besteht, so erhält man:
$s(1) = A_1 = \frac{1}{4}$
$s(2) = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2$
$s(3) = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3$

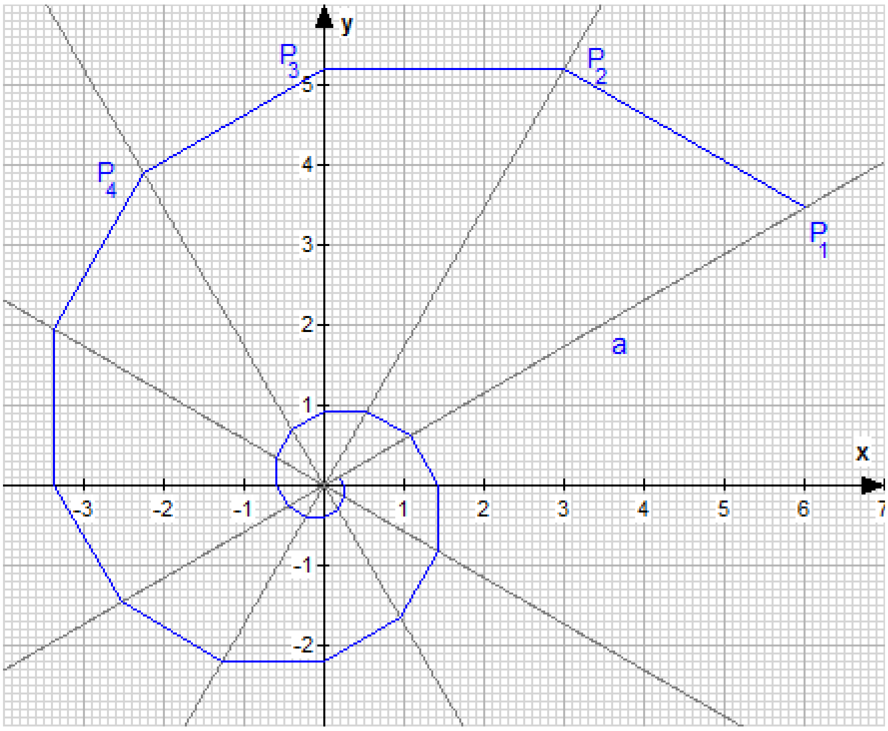
Allgemein: $s(n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^i$

Bildet man den Grenzwert für $n \to \infty$, so erhält man eine geometrische Reihe mit dem Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Weiteres Beispiel für eine geometrische Reihe (Wurzelschnecke):

6 Geraden mögen sich im Ursprung unter einem Winkel von 30° schneiden. Auf einer der Geraden sei in der Entfernung a vom Ursprung ein Punkt P_1 markiert. Von diesem Punkt aus werde das Lot auf die benachbarte Gerade gefällt. Der Lotfußpunkt werde mit P_2 bezeichnet. Von diesem aus werde das Lot auf die nächste Gerade gefällt und so fort. (siehe Grafik)
Die aneinanderliegenden Lote $P_1P_2P_3$ ... bilden einen Polygonzug, der sich um den Ursprung zusammenzieht.



Man kann zeigen, dass der Polygonzug die Länge **$L = a\cdot(2 + \sqrt{3})$** hat :

Beweis:
Zunächst sind die Längen der Streckenzüge P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 in Abhängigkeit von a zu berechnen:

$P_1P_2 = a\cdot\sin(30°) =$ **$a/2$**
$P_2P_3 = x_1\cdot\sin(30°) = x_1/2$ mit $x_1 = a\cdot\cos(30°) = a\cdot\sqrt{3}/2$. Also: $P_2P_3 =$ **$a\cdot\sqrt{3}/4$** .
$P_3P_4 = x_2\cdot\sin(30°) = x_2/2$ mit $x_2 = x1\cdot\cos(30°) = a\cdot 3/4$. Also: $P_3P_4 =$ **$a\cdot 3/8$** .
$P_4P_5 = x_3\cdot\sin(30°) = x_3/2$ mit $x_3 = x2\cdot\cos(30°) = a\cdot 3\cdot\sqrt{3}/8$. Also: $P_4P_5 =$ **$a\cdot 3\cdot\sqrt{3}/16$** .
$P_5P_6 = x_4\cdot\sin(30°) = x_4/2$ mit $x_4 = x3\cdot\cos(30°) = a\cdot 3^2/16$. Also: $P_5P_6 =$ **$a\cdot 3^2/32$** .

Allgemein: **$P_nP_{n+1} = a\cdot(\sqrt{3})^{n-1}\cdot 0{,}5^n$** .

Die Gesamtlänge ist daher $L = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a\cdot 0{,}5^i\cdot\sqrt{3}^{\,i-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^i = \frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^i$

Der Summenterm ist für $n\to\infty$ eine geometrische Reihe mit dem Grenzwert $q / (1 - q)$ für $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Folglich gilt $L = \frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}/2}{1-\sqrt{3}/2} = \frac{a/2}{1-\sqrt{3}/2} = \frac{a}{2-\sqrt{3}} = \frac{a\cdot(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = a\cdot(2+\sqrt{3})$

Bemerkungen zu „Intelligenztests“

In Intelligenztests werden u.a. Aufgaben zum Erraten von Folgegliedern gestellt.

Beispiel :

Gegeben sind die ersten Glieder einer Folge: 1 2 5 13 . Geben Sie die nächsten Glieder an !

Lösungsmöglichkeiten:

29 56 97 nach der Vorschrift $a_n = n^3/2 - 2n^2 + 7n/2 - 1$
38 116 382 $a_n = ?$
33 81 193 $a_n = ?$

Fazit : Das Bildungsgesetz einer Folge kann aus endlich vielen gegebenen Gliedern nicht bestimmt werden !