

Formeln für Kurven - explizit - implizit - parametrisch – polar

Ac 05-2024

Kreis:

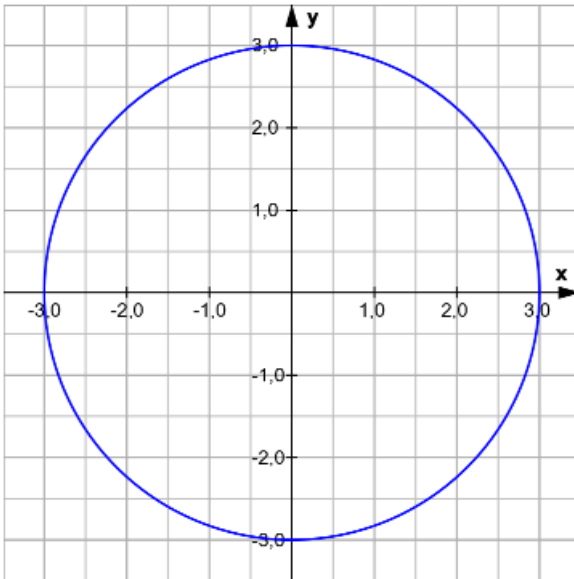
Impl: $x^2 + y^2 - r^2 = 0$; r ist der Radius

Param: $x(t) = r \cdot \cos(t)$

$y(t) = r \cdot \sin(t)$

Polar: $r(t) = r$

Grafik: $r = 3$



Ellipse mit Verschiebung um (x_m, y_m) :

Impl: $\frac{(x-x_m)^2}{a^2} + \frac{(y-y_m)^2}{b^2} - 1 = 0$

a, b sind die Halbachsen

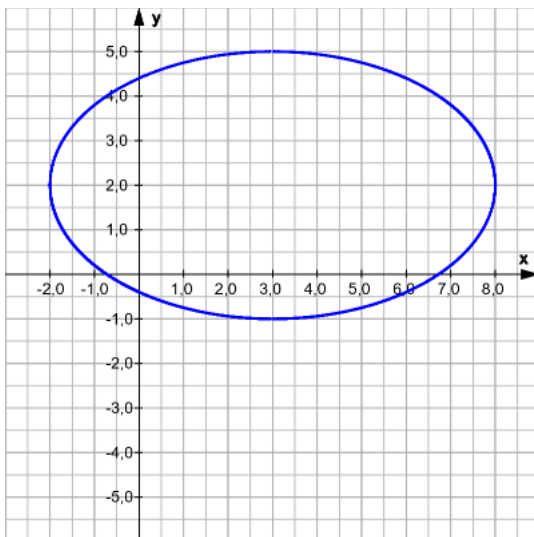
$M(x_m; y_m)$ = Mittelpunkt der Ellipse

Param: $x(t) = a \cdot \cos(t) + x_m$

$y(t) = b \cdot \sin(t) + y_m$

Polar: $r =$

Grafik: $a = 5$ $b = 3$ $x_m = 3$ $y_m = 2$



Hyperbel mit Verschiebung um (x_m, y_m) :

Impl: $\frac{(x-x_m)^2}{a^2} - \frac{(y-y_m)^2}{b^2} - 1 = 0$

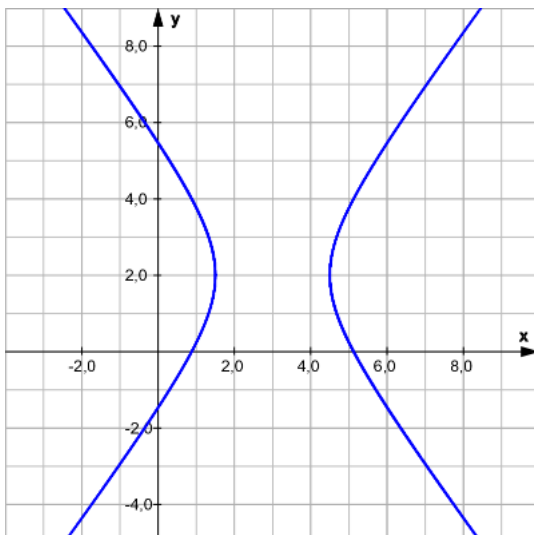
$M(x_m; y_m)$ = "Mittelpunkt" der Hyperbel

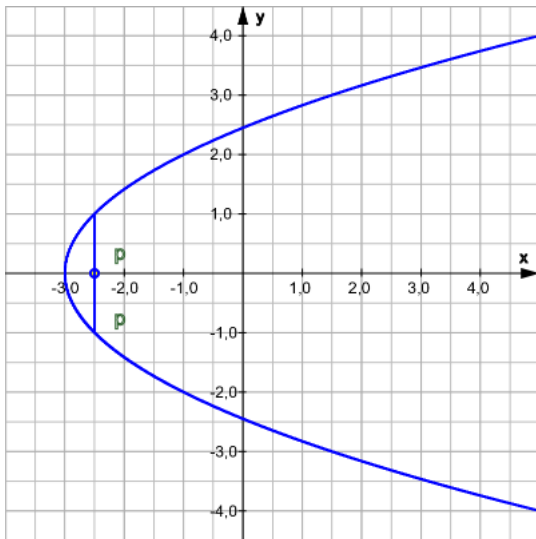
Param: $x(t) =$

$y(t) =$

Polar: $r =$

Grafik: $a = 1,5$ $b = 2$ $x_m = 3$ $y_m = 2$





Parabel mit x-Verschiebung e:

Impl: $y^2 - 2p \cdot (x - e) = 0$; nach rechts geöffnet

$2p$ ist die "Höhe" im Brennpunkt $F(\frac{1}{4a} + e ; 0)$ der Parabel

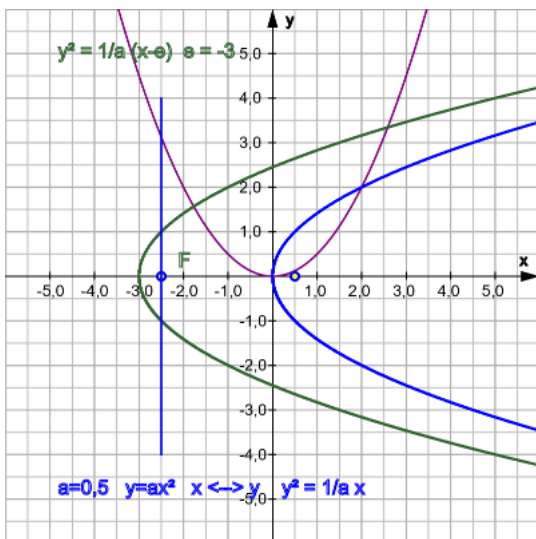
Es gilt: $2p = \frac{1}{a} \Leftrightarrow p = \frac{1}{2a}$ für eine Parabel mit $y = ax^2$

Param: $x(t) =$

$y(t) =$

Polar: $r(t) =$

Grafik: $p = 1 \rightarrow a = 1/(2p) = 0,5 \quad e = -3$



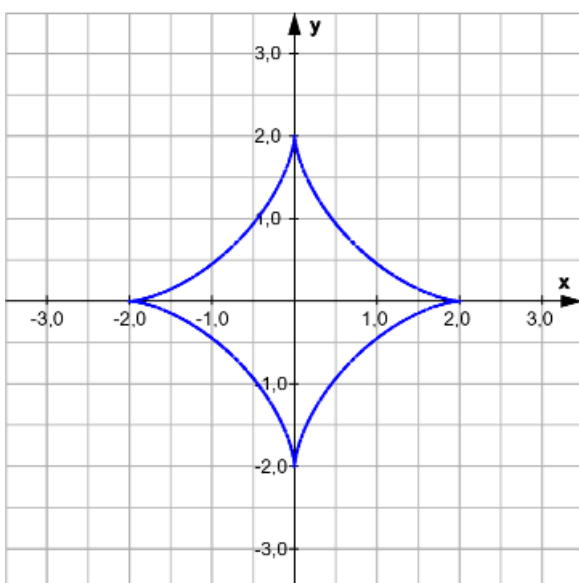
Parabelgleichung hergeleitet

$$y^2 - 2p(x-e) = 0$$

Beispiel: $p = 1 \quad e = -3$

$$y^2 - 2(x+3) = 0 \quad (\text{grüne Kurve})$$

Mit $a = 0,5$ erhält man die violette Kurve $y = 0,5x^2$



Astroide:

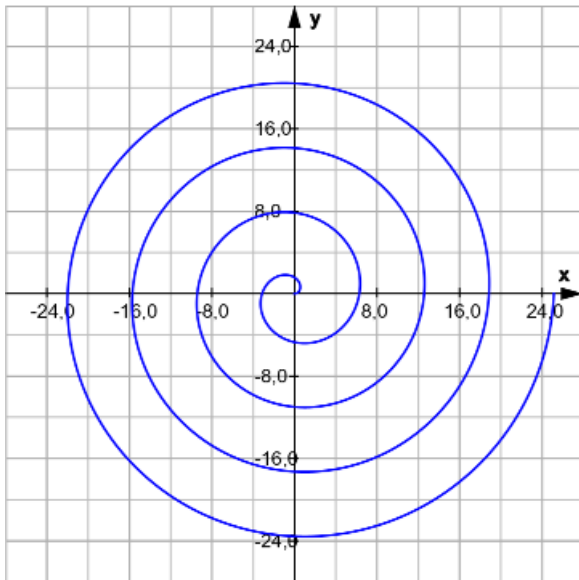
Impl: $|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} - r^{\frac{2}{3}} = 0$; $r > 0$ ist der Radius des die Astroide umschließenden Kreises.

Param: $x(t) = r \cdot \cos^3(t)$; $0 \leq t < 2\pi$

$y(t) = r \cdot \sin^3(t)$

Polar: $r(t) =$

Grafik: $r = 2$



Archimedische Spirale für $t \in [0 ; 8 \pi]$:

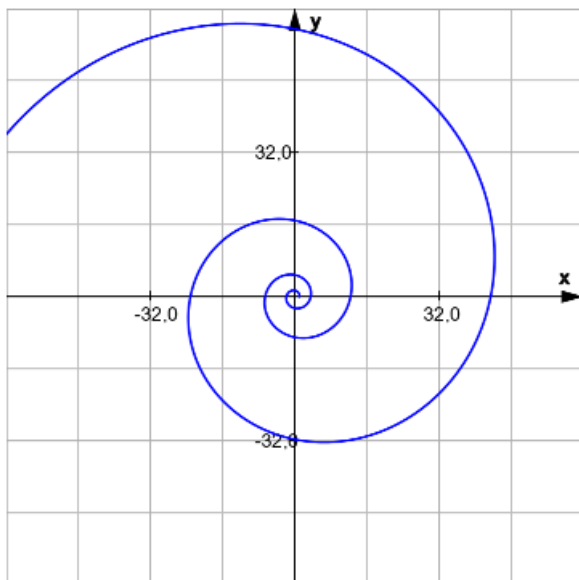
Impl: $\tan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}\right) - \frac{y}{x} = 0$

Param: $x(t) = r \cdot t \cdot \cos(t)$

$y(t) = r \cdot t \cdot \sin(t)$

Polar: $r(t) = r \cdot t$

Grafik: $r = 1$



Logarithmische Spirale für $t \in [0 ; 8 \pi]$:

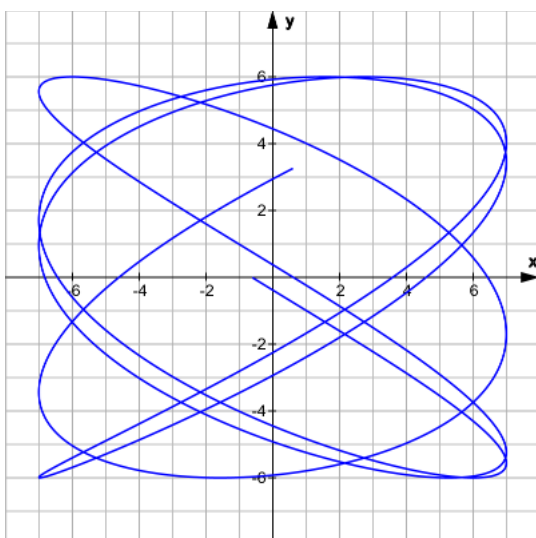
Impl:

Param: $x(t) = a \cdot e^{k \cdot t} \cdot \cos(t)$

$y(t) = a \cdot e^{k \cdot t} \cdot \sin(t)$

Polar: $r(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$

Grafik: $a = 1 \quad k = 0,2$



Lissajous:

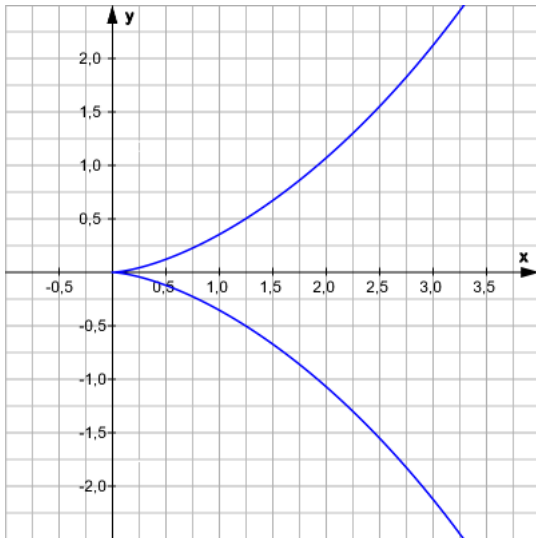
Impl:

Param: $x(t) = a_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{p_1} \cdot t\right)$

$y(t) = a_2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{p_2} \cdot t - \varphi\right)$

Polar: $r(t) =$

Grafik: $a_1 = 7 \quad a_2 = 6$
 $p_1 = 5 \quad p_2 = 7$



Zissoide des Diokles; Kissoide ;Efeukurve :

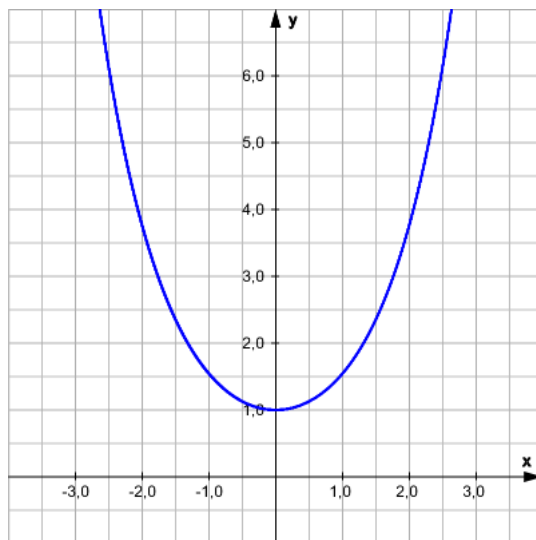
Impl: $y^2(c-x) - x^3 = 0$

Param: $x(t) = c^2 \cdot \sin^2 t$

$$y(t) = \frac{c^2 \cdot \sin^3(t)}{\cos(t)}$$

Polar: $r(t) = c^2 \cdot \tan(t) \cdot \sin(t)$
 $= c^2 \cdot \sin^2(t)/\cos(t)$

Grafik: $c = 3$



Kettenlinie (Katenoid) :

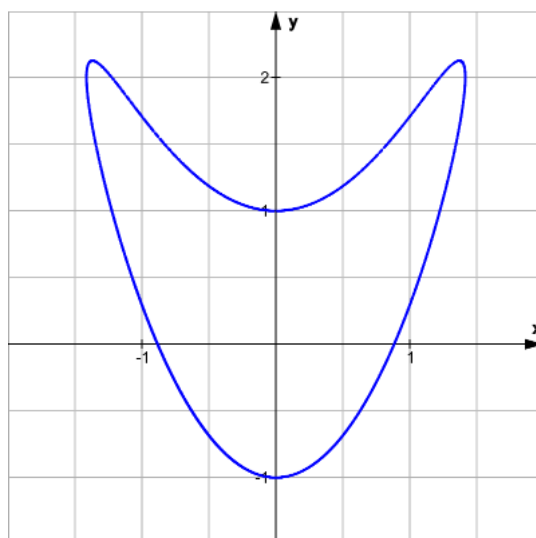
Impl: $2y - e^x - e^{-x} = 0$

Expl: $y = \cosh(x)$

Param: $x(t) =$

$y(t) =$

Polar: $r(t) =$



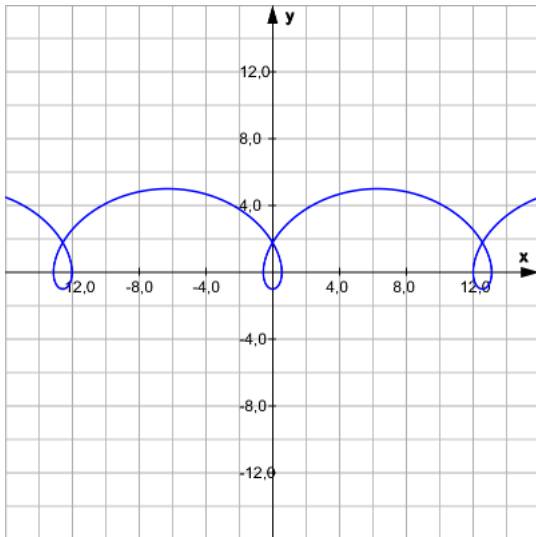
Wasenaar Kurve:

Impl: $(y - x^2)^2 - 1 + a \cdot x^2 = 0$

Param:

Polar:

Grafik: $a = 0,5$



Zykloide:

Impl: $\dot{x} = 0$

Param: $x(t) = r \cdot t - a \cdot \sin(t)$

$y(t) = r - a \cdot \cos(t)$

Polar: $r(t) =$

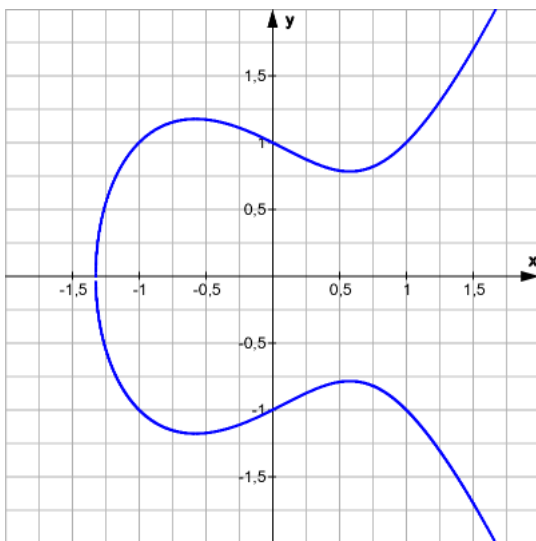
Grafik: $r = 2 \quad a = 3$

Beispiele (Sonderfälle) :

a) $r = a$ (gewöhnliche Z.)

b) $r < a$ (verlängerte Z.)

b) $r > a$ (verkürzte Z.)



Wurzelschleifen :

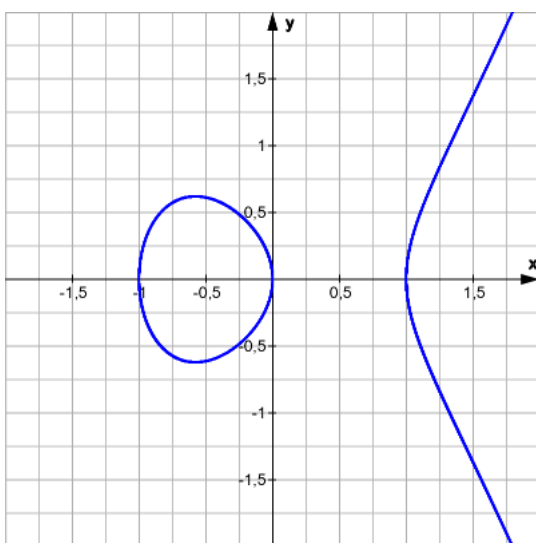
Impl: $x^3 - y^2 - a \cdot x + b = 0$

Param: $x(t) =$

$y(t) =$

Polar: $r(t) =$

Grafik: $a = 1 \quad b = 1$



Wurzelschleife 2 :

Grafik: $a = 1 \quad b = 0$

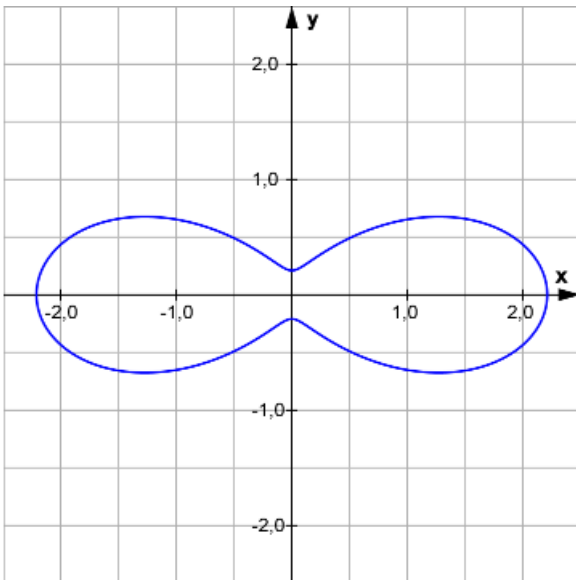
Cassinische Kurven (1):

Impl: $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2 \cdot (x^2 - y^2) - a^4 + c^4 = 0$;
 $a, c \geq 0$

Param: $x(t) =$
 $y(t) =$

Polar: $r(t) = c^2 \cdot \cos(2t) \pm \sqrt{c^4 \cdot [\cos^2(2t) - 1] + a^4}$

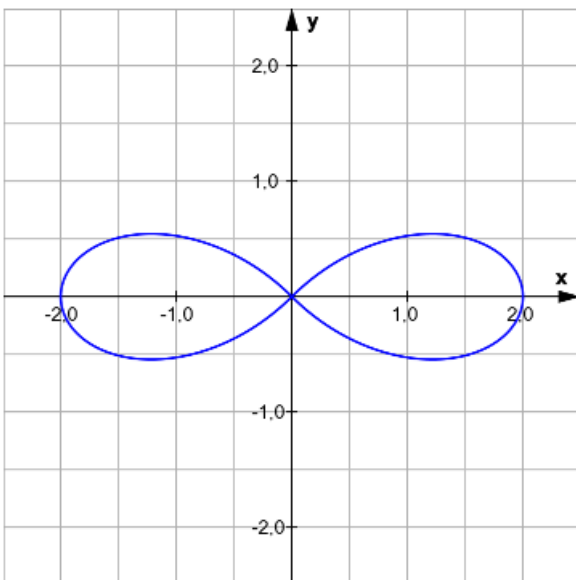
Grafik: $a = 1,1 \quad c = 1$



Cassinische Kurven (2):

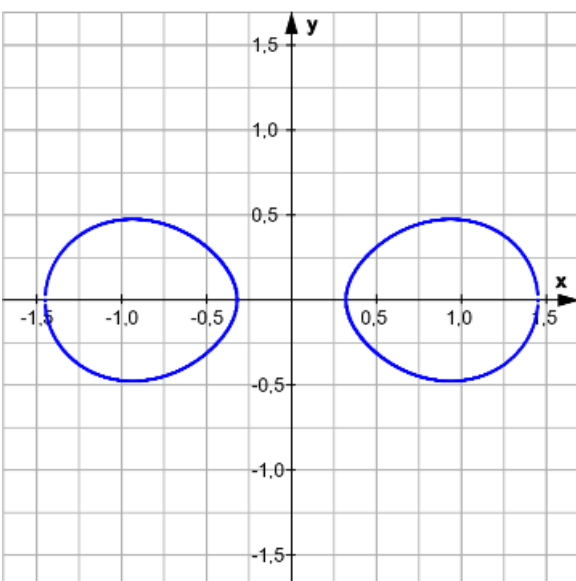
Grafik: $a = c = 1$

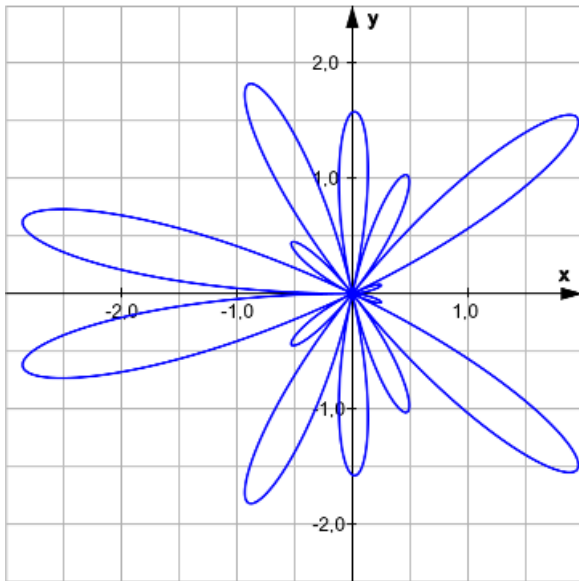
Lemniskate !



Cassinische Kurven (3):

Grafik: $a = 1 \quad c = 1,05$





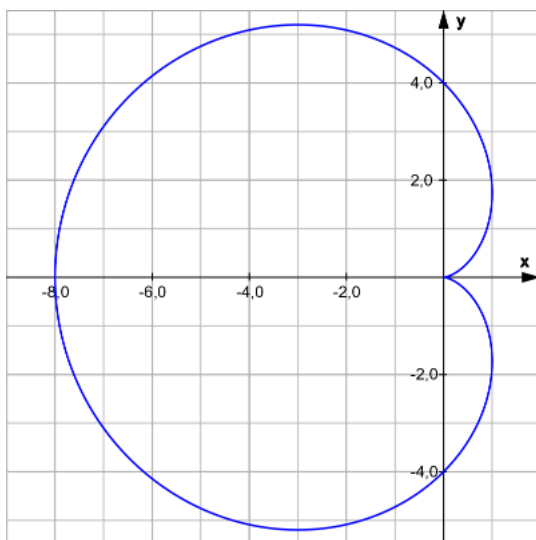
Rosette:

Impl:

Param: $x(t) = (t \cdot \sin(7t)) \cdot \cos(t)$

$y(t) = (t \cdot \sin(7t)) \cdot \sin(t)$

Polar: $r(t) = t \cdot \sin(7t)$



Kardioide :

Impl: $(x^2 + y^2)^2 + 4ax(x^2 + y^2) - 4a^2y^2 = 0$

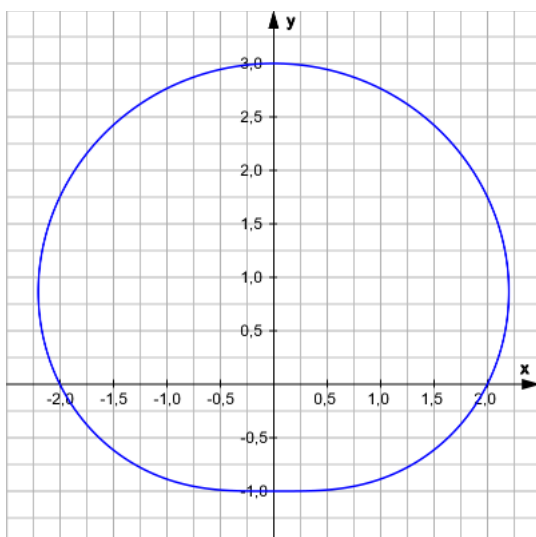
$x \in [-0,5 ; 4] \quad |y| \leq \sqrt{6,675} \approx 2,598$

Param: $x(t) = 2a \cdot (1 - \cos(t)) \cdot \cos(t)$

$y(t) = 2a \cdot (1 - \cos(t)) \cdot \sin(t)$

Polar: $r(t) = 2a \cdot (1 - \cos(t)) \quad ; \quad t \in [0 ; 2\pi]$

Grafik: $a = 2$



Spezielles Ei $t \in [-\pi ; \pi]$:

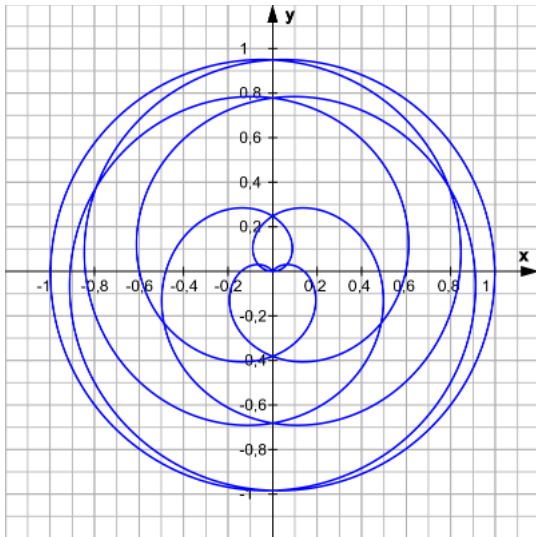
Impl:

Param: $x(t) = (2 + \sin(t)) \cdot \cos(t)$

$y(t) = (2 + \sin(t)) \cdot \sin(t)$

Polar: $r(t) = 2 + \sin(t)$

Dies ist kein Kreis !



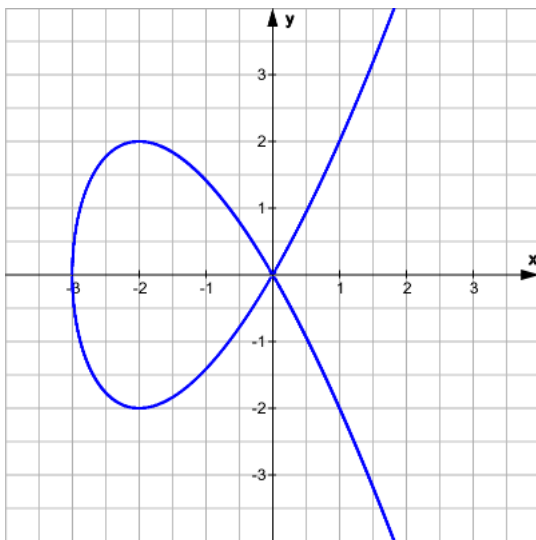
Sinuskreis:

Impl:

Param: $x(t) = \sin(t) \cdot \cos(2\pi \cdot t)$

$y(t) = \sin(t) \cdot \sin(2\pi \cdot t)$

Polar:



Tschirnhausen Kubik:

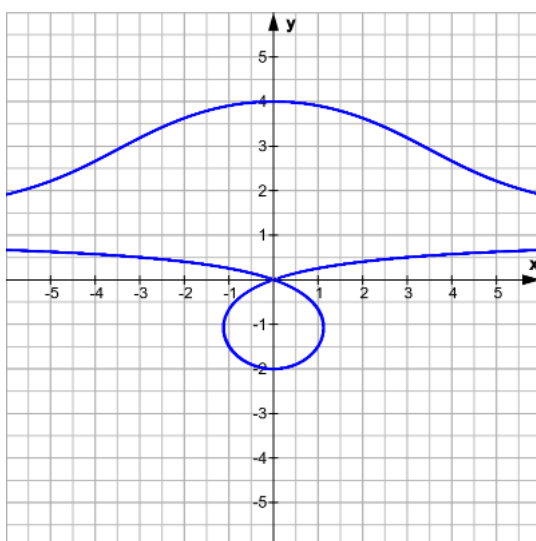
Impl: $a \cdot (x^3 + 3x^2 - y^2) = 0$

Param: $x(t) =$

$y(t) =$

Polar:

Grafik: $a = 1$



Konchoide (Muschelähnliche; NIKOMEDES)

Impl: $(x^2 + y^2) \cdot (y - a)^2 - b^2 \cdot y^2 = 0$

Param: $x(t) = a + b \cdot \cos(t)$

$y(t) = a \cdot \tan(t) + b \cdot \sin(t)$

Polar: $r(t) = \frac{a}{\cos(t)} \pm 1$

+ und - für die beiden Zweige !!

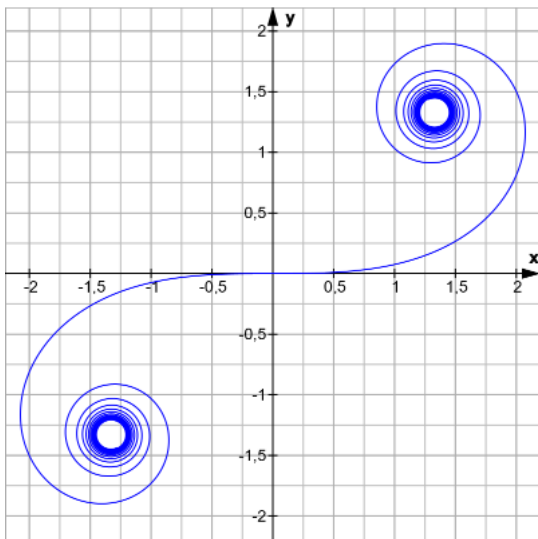
Grafik: $a = 1 \quad b = 3$

Beispiele (Sonderfälle) :

a) $a = b$ (K. mit Spitze in (0;0))

b) $a > b$ (K. mit isoliertem Punkt in (0;0))

b) $a < b$ (K. mit Schleife und Doppelp. in (0;0))



Klothoide:

Impl:

$$\text{Param: } x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{t^2}{2a^2}\right) dt$$

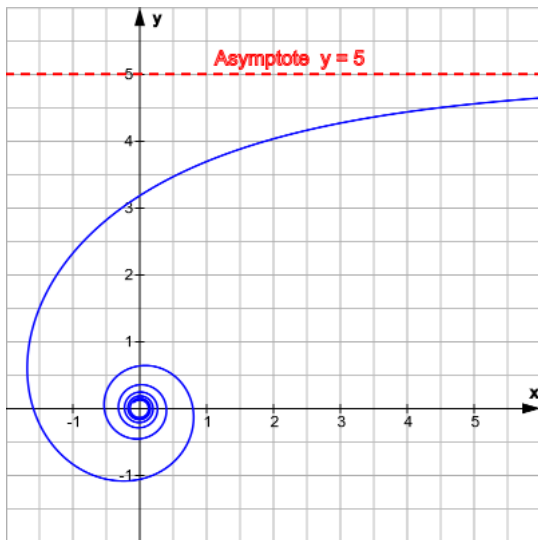
$$y(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{t^2}{2a^2}\right) dt$$

a ist ein Klothoidenparameter.

Je größer a , desto größer der Graph !

Polar: $r(t) =$

Grafik: $a = 1,5 \quad t \in [-6\pi ; 6\pi] \quad \Delta t = \pi / 144$



Hyperbolische Spirale:

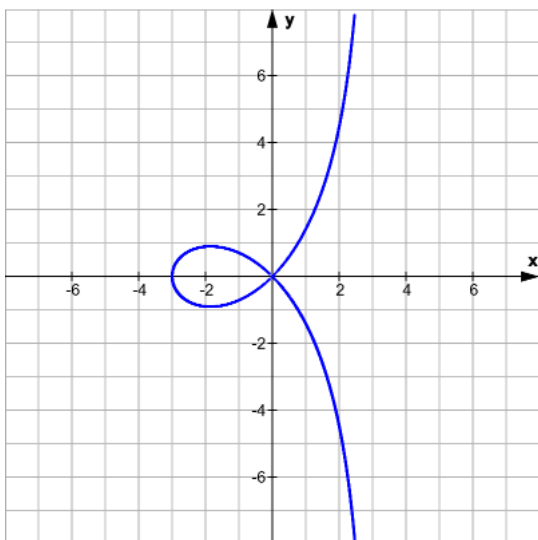
Impl:

$$\text{Polar: } r(t) = \frac{a}{t}; \quad 0 < t < \infty, a > 0$$

Die Polargleichung beschreibt den Abstand r eines Spiralenpunktes vom Pol antiproportional zum zugehörigen Polarwinkel t .

a definiert die Lage der Asymptote ($y = a$).

Grafik: $a = 5 \quad t \in [0 ; 40] \quad \Delta t = \pi / 360$



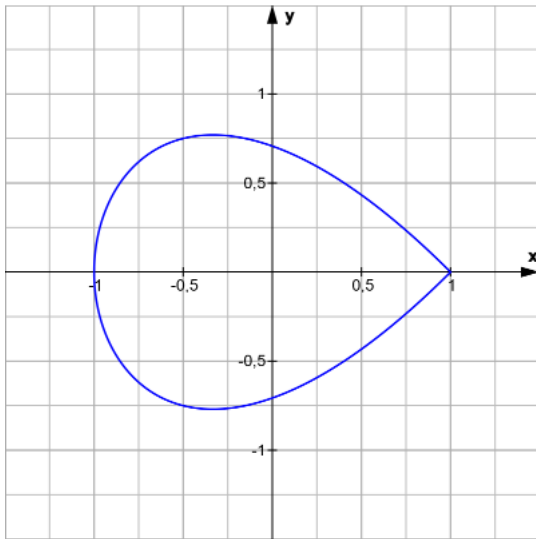
Strophoide:

Impl: $y^2 \cdot (a-x) - x^2 \cdot (a+x) = 0; \quad a > 0; \quad -\infty < t < \infty$

$$\text{Param: } x(t) = a \cdot \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \quad y(t) = a \cdot t \cdot \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

$$\text{Polar: } r(t) = -a \cdot \frac{\cos(2t)}{\cos(t)}$$

Grafik: $a = 3$



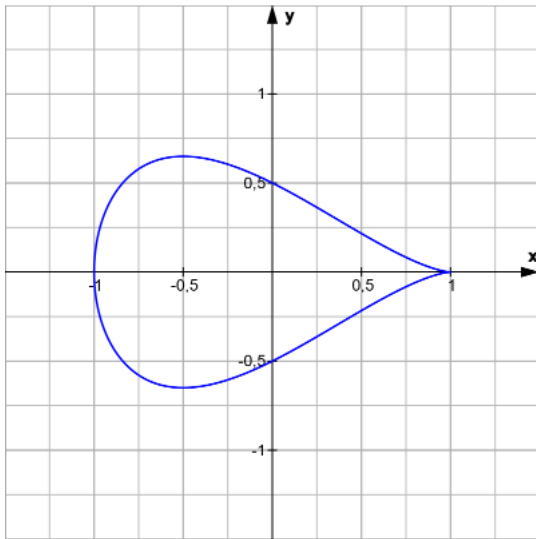
Tropfen-Kurve:

Impl: $y^2 - x^n \cdot (1 - x) = 0 ; n > 1$

Param: $x(t) = \cos(t)$

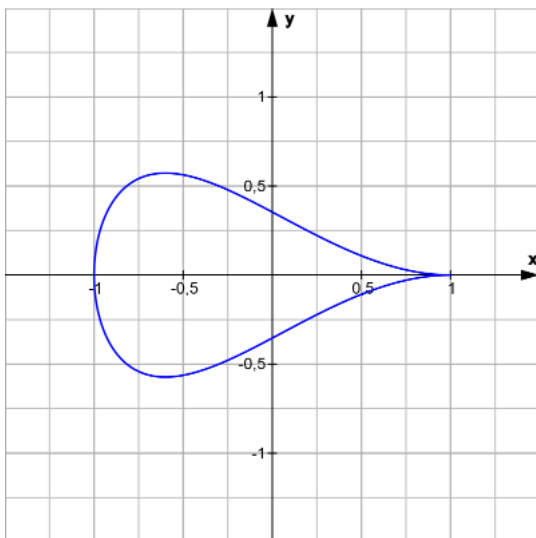
$y(t) = \sin(t) \cdot \sin^{n-1}(\frac{t}{2})$

Grafik: $n = 2 \quad t \in [0 ; 2\pi] \quad \Delta t = 0,01$



Tropfen-Kurve 2:

Grafik: $n = 3 \quad t \in [-10 ; 10] \quad \Delta t = \pi / 360$



Tropfen-Kurve 3:

Grafik: $n = 4 \quad t \in [-10 ; 10] \quad \Delta t = \pi / 360$