FRESNEL-Integrale und Klothoide („Cornu-Spirale“) Ac 05/06-2024

Fresnel-Integrale werden zum Beispiel bei der Berechnung der Klothoide sowie im Straßenbau verwendet. Sie sind nicht elementar lösbar, sondern müssen approximiert werden.

Die **Klothoide** (auch: Klotoide) wird mittels „Parameterform“ (x(t) ; y(t)) definiert:

Die Klothoide geht auf die "uneigentlichen Integrale"

$$\int_0^\infty \cos(u^2)\,du = \int_0^\infty \sin(u^2)\,du = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \quad \text{zurück.}$$

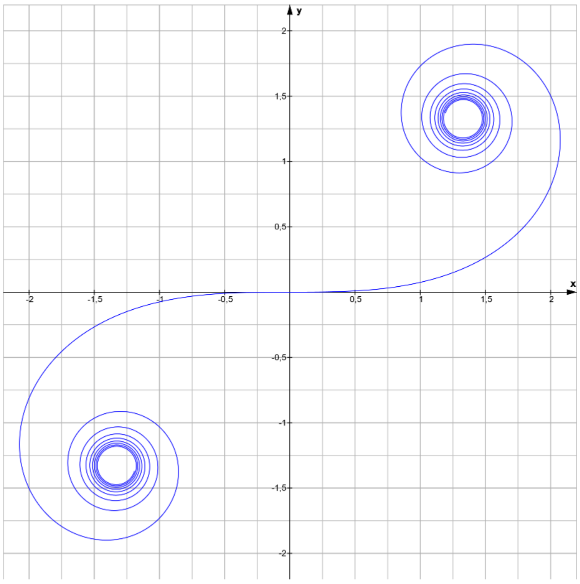
Verwendet man für ∞ die Grenze t und ersetzt noch u^2 durch $\frac{\pi}{2}u^2$, so entstehen 2 nicht geschlossen lösbare Integrale, die Fresnel-Integrale C(t) sowie S(t) (siehe: "Wolfram alpha")

$$C(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du \quad \text{und} \quad S(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du \ ,$$

welche durch jeweilige Multiplikation mit $a \cdot \sqrt{\pi}$ eine

Definition der Klothoide darstellen (Bronstein Taschenbuch):

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= a\cdot\sqrt{\pi}\cdot\int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du \ := a\cdot\sqrt{\pi}\cdot C(t) \\ y(t) &= a\cdot\sqrt{\pi}\cdot\int_0^t \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du \ := a\cdot\sqrt{\pi}\cdot S(t) \end{aligned}}$$



Grafik mit a = 1,5.

$t \in [\,-5\pi\ ;\ 5\pi\,]$

Der Krümmungsradius r der Klothoide ist antiproportional zur Länge s des Bogens $\overset{\frown}{OP}$ (P=Kurvenpunkt); $r = \frac{a^2}{s}$ $(a > 0)$

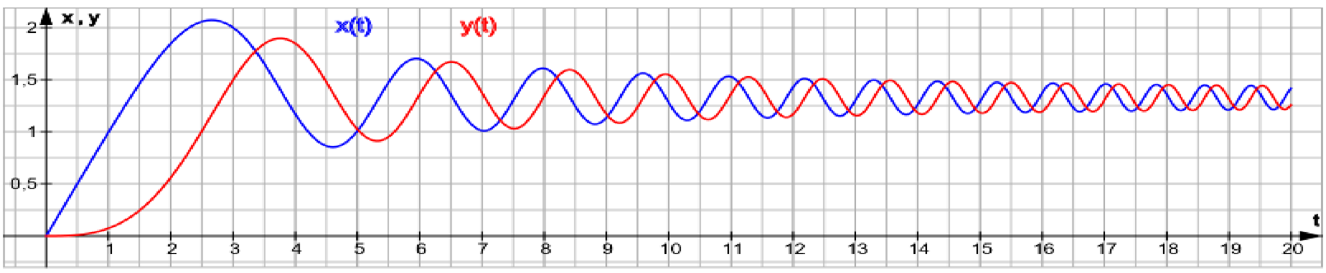
Die Klothoide ist punktsymmetrisch zum Ursprung !

Die Klothoidenpunkte P_i konvergieren gegen

$$P_\infty\left(\pm\frac{a}{2}\cdot\sqrt{\pi}\ ;\ \pm\frac{a}{2}\cdot\sqrt{\pi}\right)$$

Beispiel: a = 1,5. Dann gilt : $P_\infty(\approx \pm 1{,}33\ ;\ \approx \pm 1{,}33)$

Die Konvergenz der beiden Funktionen x(t) und y(t) kann man an der folgenden Grafik (für a = 1,5 und t ≥ 0) erkennen.



<u>Approximation von x(t) und y(t) durch Potenzreihen</u>

Da die Berechnung über Integrale recht langsam erfolgt, verwendet man in der Praxis (z.B. Straßenbau) die schneller konvergierenden Potenzreihenentwicklungen dieser Integrale.

Zunächst benötigt man die TAYLOR-Reihen der sin- und cos-Terme.

Der Einfachheit halber rechnen wir im Folgenden mit den FRESNEL-Integralen C(t) und S(t)!

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\pm\ldots \quad ;x\in\mathbb{R}\\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\pm\ldots \quad ;x\in\mathbb{R}\end{aligned}}$$

Für eine schnelle Berechnung kann man durch Anwendung des HORNER-Schemas geschickte Ausklammerungen wie folgt vornehmen:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1-\frac{x^2}{1\cdot 2}\cdot(1-\frac{x^2}{3\cdot 4}\cdot(1-\frac{x^2}{5\cdot 6}\cdot(1-\frac{x^2}{7\cdot 8}\cdot(1-\ldots-\frac{x^2}{(2n-1)\cdot 2n})\ldots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x\cdot(1-\frac{x^2}{2\cdot 3}\cdot(1-\frac{x^2}{4\cdot 5}\cdot(1-\frac{x^2}{6\cdot 7}\cdot(1-\frac{x^2}{8\cdot 9}\cdot(1-\ldots-\frac{x^2}{2n\cdot(2n+1)})\ldots)$$

In den cos- und sin-Termen muss noch die Variable x durch $\pi/2\cdot u^2$ ersetzt werden.
Die jeweiligen Integrale (zunächst für cos und sin) sind gesucht.
Wir integrieren also die Potenzterme:

$$\int\cos(\frac{\pi}{2}u^2)\,du = \int\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{(\frac{\pi}{2}u^2)^{2k}}{(2k)!}\,du = \int\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{(\frac{\pi}{2})^{2k}\cdot u^{4k}}{(2k)!}\,du$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{(\frac{\pi}{2})^{2k}}{(4k+1)\cdot(2k)!}\cdot u^{4k+1}$$

$$\int\sin(\frac{\pi}{2}u^2)\,du = \int\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{(\frac{\pi}{2}u^2)^{2k+1}}{(2k+1)!}\,du = \int\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{(\frac{\pi}{2})^{2k+1}\cdot u^{4k+2}}{(2k+1)!}\,du$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{(\frac{\pi}{2})^{2k+1}}{(4k+3)\cdot(2k+1)!}\cdot u^{4k+3}$$

Für eine passable Approximation der Reihen genügen in der Praxis (z.B. Straßenbau) schon ihre ersten 4 bis 5 Glieder. „passabel" bedeutet hier, dass die Approximation in einem bestimmte Bereich von [0 ; t] ganz brauchbar ist. Für große t-Werte (ab t = 5) divergieren die Potenzterme, so dass man hier mehr Glieder als 5 oder andere Formeln (s. unten !) verwenden muss.

Wir verwenden als Beispiel nun Potenzreihen mit 5 Gliedern (k = 0 .. 4) und setzen außerdem für u die Grenzen 0 und t ein :

$$\int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du \approx \left[\sum_{k=0}^{4} (-1)^k \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}}{(4k+1)\cdot(2k)!}\cdot u^{4k+1}\right]_0^t = t\cdot \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}}{(4k+1)\cdot(2k)!}\cdot t^{4k}$$

$$\int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du \approx t\cdot\left(1 - \frac{\pi^2}{40}t^4 + \frac{\pi^4}{3456}t^8 - \frac{\pi^6}{599040}t^{12} + \frac{\pi^8}{175472640}t^{16}\right)$$

und mit HORNER-Schema:

$$\int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du \approx t\cdot\left(1 - \frac{\pi^2}{40}t^4\cdot\left(1 - \frac{5\cdot\pi^2}{1728}t^4\cdot\left(1 - \frac{3\cdot\pi^2}{8320}t^4\cdot\left(1 - \frac{13\cdot\pi^2}{243712}\,t^4\right)\right)\right)\right)$$

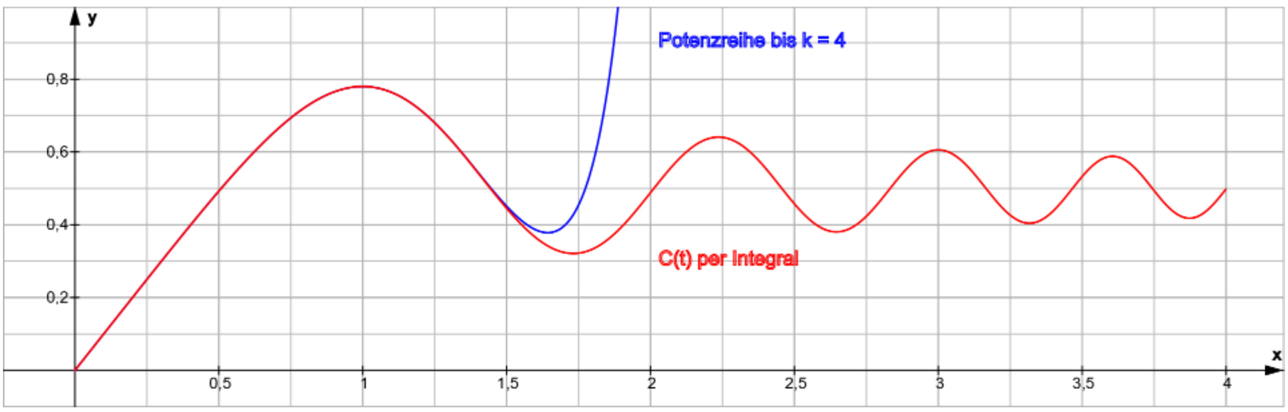
$$\int_0^t \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du \approx \left[\sum_{k=0}^{4} (-1)^k \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}}{(4k+3)\cdot(2k+1)!}\cdot u^{4k+3}\right]_0^t = \frac{\pi}{2}\cdot t^3\cdot \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}}{(4k+3)\cdot(2k+1)!}\cdot t^{4k}$$

$$\int_0^t \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du \approx \frac{\pi}{6}t^3\cdot\left(1 - \frac{\pi^2 t^4}{28} + \frac{\pi^4 t^8}{3520} - \frac{\pi^6 t^{12}}{806400} + \frac{\pi^8 t^{16}}{294174720}\right)$$

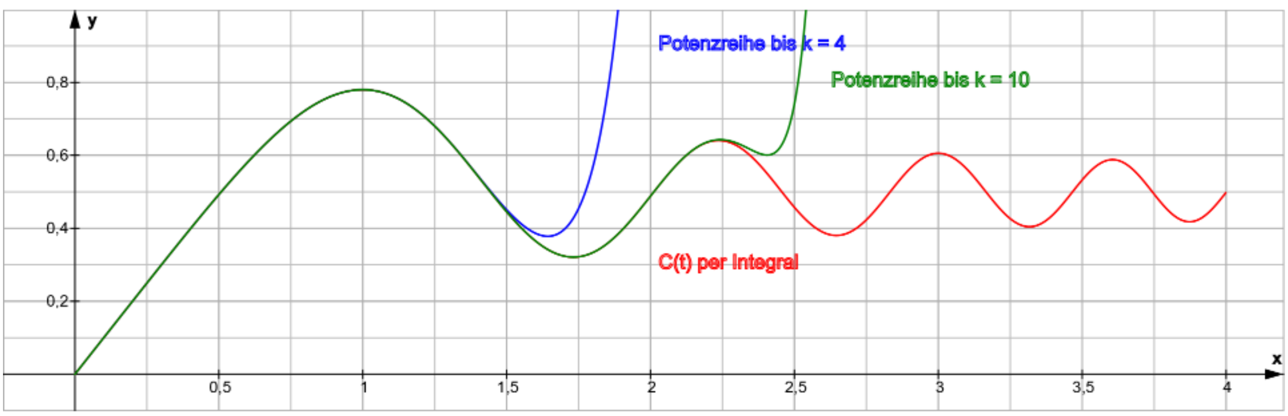
und mit HORNER-Schema:

$$\int_0^t \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du \approx \frac{\pi}{6}t^3\cdot\left(1 - \frac{\pi^2}{28}t^4\cdot\left(1 - \frac{7\pi^2}{440}t^4\cdot\left(1 - \frac{11\pi^2}{1260}t^4\cdot\left(1 - \frac{5\pi^2}{912}t^4\right)\right)\right)\right)$$

Wie genau diese Approximationen sind, sieht man an der folgenden Vergleichsgrafik:

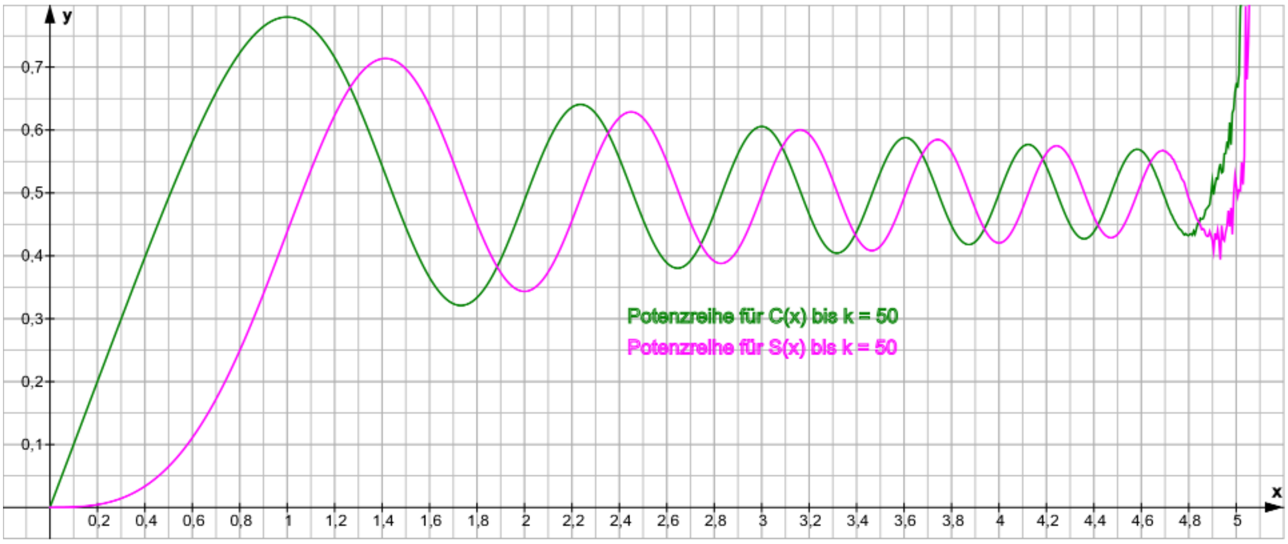


Die Reihenapproximation (Summe mit 5 Gliedern) wird bereits ab t = 1,4 immer schlechter; schließlich divergiert sie. Ein (komplettes) C(t) kann man also damit nicht zeichnen !



In der Grafik erkennt man die bessere Approximation der Potenzreihe mit 11 Gliedern !

Erhöht man die Anzahl der Glieder der Potenzreihe, so tritt ein interessantes Phänomen auf.
Die Reihe beginnt ab einer bestimmten Stelle für x zu „oszillieren“ (siehe folgende Grafik) .



Wir suchen daher nach einer Verbesserung !

Eine bessere Methode als die Erhöhung der Anzahl der Glieder ist die folgende:

Für **große t-Werte** gibt es für die beiden Fresnel-Integrale C(x) und S(x) die Approximationen

Fresnel-Approximation für große t :

$$C(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$$

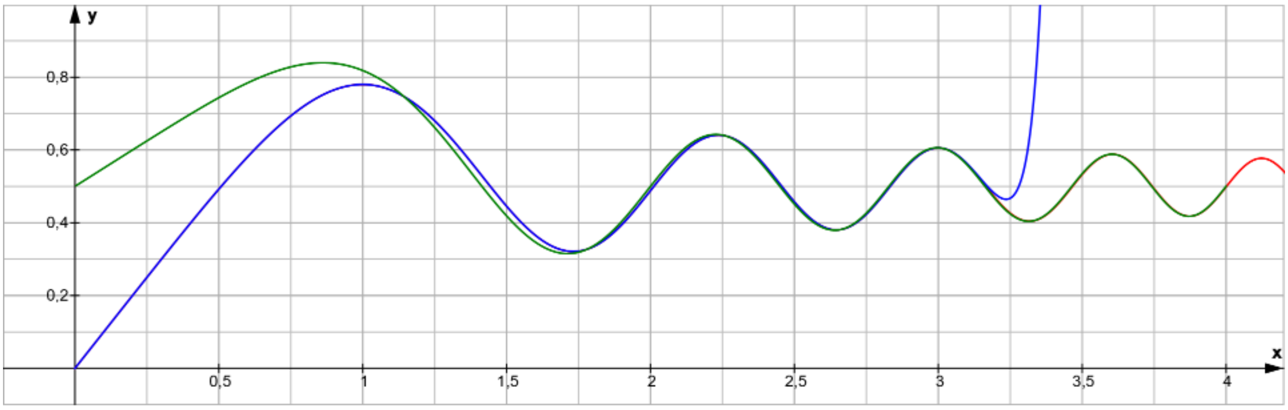
$$S(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi x}\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$$

Für **kleine t-Werte** kann man die Reihenapproximationen verwenden:

Was bedeutet aber „groß“ bzw. „klein“ ?

Wir betrachten die Formel für C(x) bis zu k = 20:

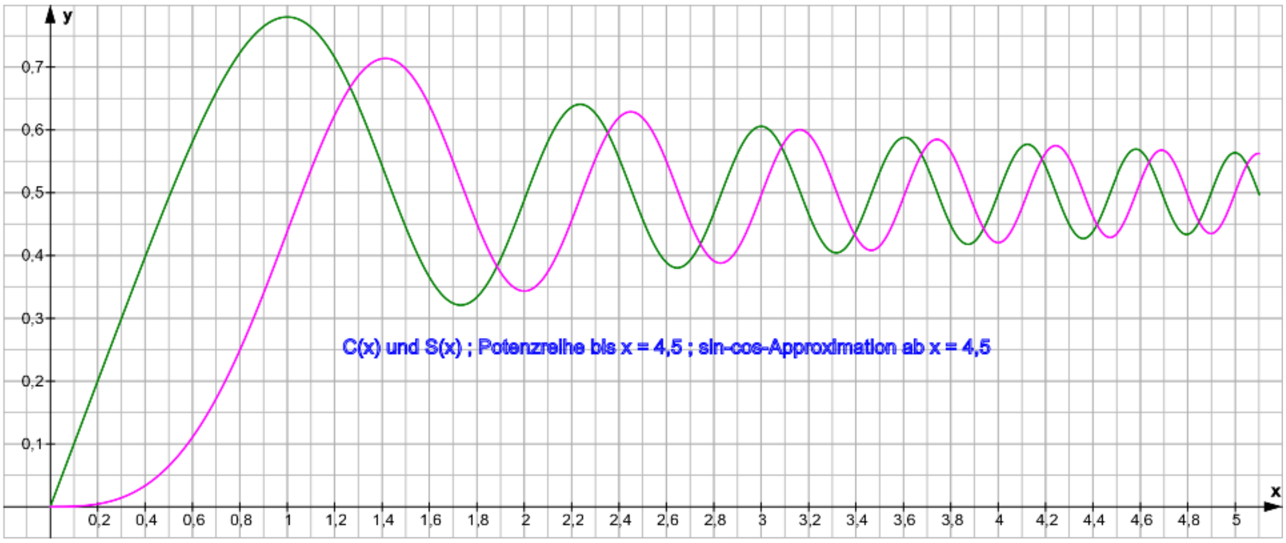
```
C(x) ≈ x*((((((((((((((((((1.0584369537070216E-42*x^4-7.039537587321733E-40)* x^4
+4.231141640048331E-37)*x^4-2.2859257735768532E-34)*x^4+1.1034456863523295E-31)*x^4-
4.727226384742681E-29)*x^4+1.7837783103437512E-26)*x^4-5.877896118036892E-24)*x^4
+1.6748476126215183E-21)*x^4-4.079981449233878E-19)*x^4+8.384729705118554E-17)*x^4-
1.4309189731715198E-14)*x^4+1.989685792418022E-12)*x^4-2.2022769254454663E-10)*x^4
+1.8843499115272686E-8)*x^4-1.2000972558600288E-6)*x^4+5.4074133814083916E-5)*x^4-
0.001604883135642535)*x^4+0.028185500877894225)*x^4-0.2467401100272339)*x^4+1.0)
```



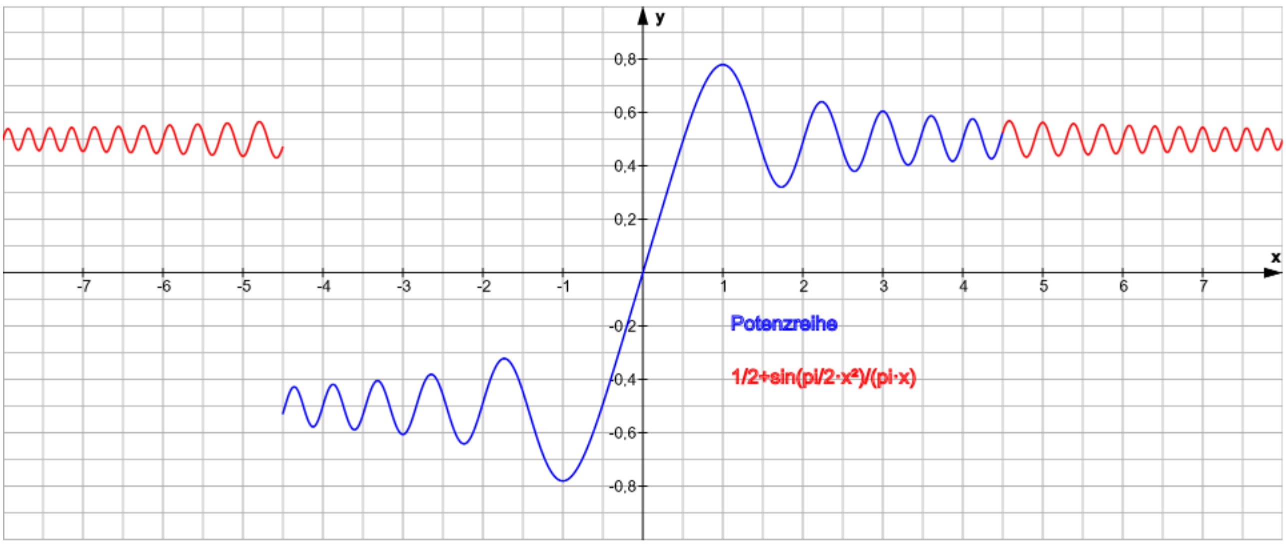
Die rote Kurve wurde mit der Integral-Formel (Simpsonintegration) berechnet.
Die Reihenapproximation mit 21 Gliedern (blau) approximiert nur bis x=3,1 gut.
Die Approximation mit dem sin-Term (grün) ist nur ab x = 3,0 zu gebrauchen.

Also verwenden wir die Reihe für x < 3,1 und die sin-Approximation für x ≥ 3,1 !

Die folgende Grafik zeigt das Zusammenspiel zwischen Potenzreihe und sin-cos-Approximation:

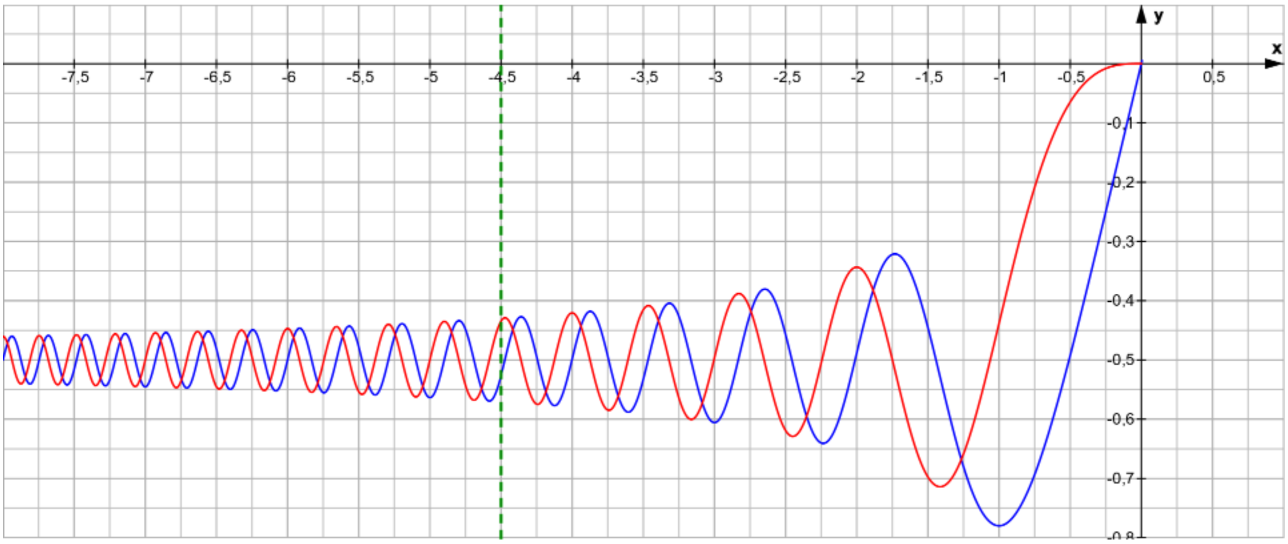


Für negative x müssen die sin-cos-Terme stetig in die Potenzterme übergehen, was sie aber nicht tun, wie die Grafik zeigt.



Daher müssen für x < - 4,5 die sin-cos-Terme folgendermaßen geändert werden:
C(x) wird für x < -4,5 ersetzt durch -C(-x) bzw. S(x) durch -S(-x) .

```
-C(-x) = -1/2-sin(pi/2·x²)/(pi·(-x)) = -1/2+sin(pi/2·x²)/(pi·x) ;  x < 0
   und entsprechend
-S(-x) = -1/2+cos(pi/2·x²)/(pi·(-x)) = -1/2-cos(pi/2·x²)/(pi·x) ;  x < 0
```



Man sieht, dass die Stetigkeit auch für negative x nun hergestellt ist !

<u>Formeln für die beiden Reihen (bis k = 50):</u>

<u>kmax = 50:</u> brauchbar bis x = 4,5 ; ab x ≈ 4,75 "oszillieren" die Reihen !!!

```
C(x) ≈  x*((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((2.1816646307136125E-141*xhoch4-
8.93127090513379E-138)*xhoch4+3.512208064225682E-134)*xhoch4-1.3256559481900954E-
130)*xhoch4+4.798350284071141E-127)*xhoch4-1.664081405610644E-123)*xhoch4+5.5242412741981435E-
120)*xhoch4-1.7537269352805842E-116)*xhoch4+5.318620384218647E-113)*xhoch4-1.5392862093521023E-
109)*xhoch4+4.246553147866791E-106)*xhoch4-1.1154243261306236E-102)*xhoch4+2.786082081364676E-
99)*xhoch4-6.608975944786577E-96)*xhoch4+1.4868503626303136E-92)*xhoch4-3.16786921696354E-
89)*xhoch4+6.382240506093849E-86)*xhoch4-1.2139087824879647E-82)*xhoch4+2.1760332257242042E-
79)*xhoch4-3.6696613598966283E-76)*xhoch4+5.810752826069961E-73)*xhoch4-8.621749859622048E-
70)*xhoch4+1.1960957082430905E-66)*xhoch4-1.5478498879100003E-63)*xhoch4+1.8637854383527427E-
60)*xhoch4-2.082560396416644E-57)*xhoch4+2.153146474546395E-54)*xhoch4-2.0533439457355955E-
51)*xhoch4+1.800052763199601E-48)*xhoch4-1.445232416723333E-45)*xhoch4+1.0584369537070216E-
42)*xhoch4-7.039537587321733E-40)*xhoch4+4.231141640048331E-37)*xhoch4-2.2859257735768532E-
34)*xhoch4+1.1034456863523295E-31)*xhoch4-4.727226384742681E-29)*xhoch4+1.7837783103437512E-
26)*xhoch4-5.877896118036892E-24)*xhoch4+1.6748476126215183E-21)*xhoch4-4.079981449233878E-
19)*xhoch4+8.384729705118554E-17)*xhoch4-1.4309189731715198E-14)*xhoch4+1.989685792418022E-
12)*xhoch4-2.2022769254454663E-10)*xhoch4+1.8843499115272686E-8)*xhoch4-1.2000972558600288E-
6)*xhoch4+5.4074133814083916E-5)*xhoch4-0.0016048831356425355)*xhoch4+0.028185500877894225)*xhoch4-
0.24674011002723398)*xhoch4+1.0)
```

```
S(x) ≈  pi/2*x^3*((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((2.138782572176931E-143*xhoch4-
8.930817564140686E-140)*xhoch4+3.5836963066114545E-136)*xhoch4-1.380815509550443 8E-
132)*xhoch4+5.104334440533385E-129)*xhoch4-1.8086755204199036E-125)*xhoch4+6.137660570793242E-
122)*xhoch4-1.992740622683357E-118)*xhoch4+6.184016821004137E-115)*xhoch4-1.8323513782778794E-
111)*xhoch4+5.1783311126755535E-108)*xhoch4-1.3941694069143215E-104)*xhoch4+3.5716008248747E-
101)*xhoch4-8.695253119410154E-98)*xhoch4+2.0090700082135446E-94)*xhoch4-4.3993850053408444E-
91)*xhoch4+9.116535807891329E-88)*xhoch4-1.7849626099601913E-84)*xhoch4+3.296632837562212E-
81)*xhoch4-5.733129233684272E-78)*xhoch4+9.37093285291837E-75)*xhoch4-1.4367536441757295E-
71)*xhoch4+2.0619193750033442E-68)*xhoch4-2.763564910437183E-65)*xhoch4+3.4508459006707456E-
62)*xhoch4-4.004161432287856E-59)*xhoch4+4.305405236672857E-56)*xhoch4-4.276841813066302E-
53)*xhoch4+3.9122025866853357E-50)*xhoch4-3.2837411232687337E-47)*xhoch4+2.519347436093704E-
44)*xhoch4-1.759313191248859E-41)*xhoch4+1.1130570800847861E-38)*xhoch4-6.34723856647094E-
36)*xhoch4+3.243960633781159E-33)*xhoch4-1.4765018406006327E-30)*xhoch4+5.942452582676436E-
28)*xhoch4-2.097834978154581E-25)*xhoch4+6.436669256349364E-23)*xhoch4-1.6984196597180807E-
20)*xhoch4+3.8070201318921455E-18)*xhoch4-7.144939542151988E-16)*xhoch4+1.103523212601592E-
13)*xhoch4-1.3734630287724413E-11)*xhoch4+1.3421295666148636E-9)*xhoch4-9.961281570379685E-
8)*xhoch4+5.375791080932319E-6)*xhoch4-1.9869981679383771E-4)*xhoch4+0.004612172870928146)*xhoch4-
0.0587476452445795 2)*xhoch4+0.3333333333333333)
```