Spline – Interpolation

Ac 2-2017

Theorie:

Der Begriff **Spline** stammt aus dem Schiffsbau, wo elastische Latten (engl. Splines) so gebogen werden, dass sie eine vorgegebene Anzahl von Knotenpunkten durch eine glatte Linie verbinden.
Der Vorteil gegenüber anderen Näherungsverfahren ist, dass Splines nicht so stark oszillieren !

Gegeben sind n+1 Stützstellen x_0 bis x_n zusammen mit den Stützwerten y_0 bis y_n , wobei $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$

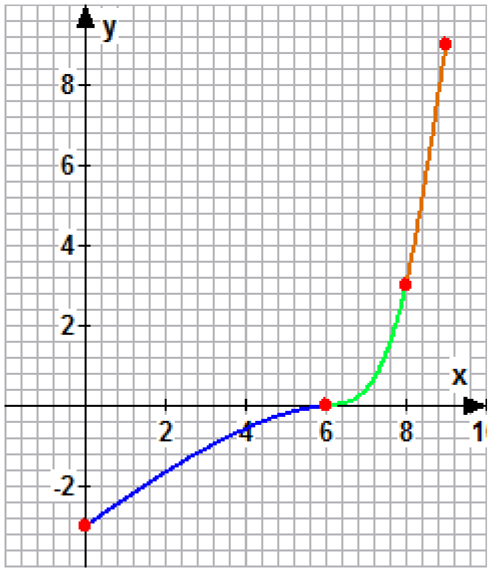
Durch die Punkte (x_i / y_i) soll ein biegsames Kurvenlineal möglichst glatt gelegt werden.

Die Biegelinie s(x) bestehe aus n kubischen Polynomen $\mathbf{p_0 , p_1, p_2, p_{n-1}}$, wobei gelte:

$\mathbf{p_i(x) = a_ix^3 + b_ix^2 + c_ix + d_i}$
und $\mathbf{s(x) = p_i(x)}$ für $\mathbf{x_i \le x \le x_{i+1}}$ für **i von 0 bis n-1** .

Das Bild zeigt ein Beispiel für 3 kubische Polynome p_0, p_1, p_2 mit den 4 Stützpunkten:

$x_0 = 0$ $x_1 = 6$ $x_2 = 8$ $x_3 = 9$
$y_0 = -3$ $y_1 = 0$ $y_2 = 3$ $y_3 = 9$



Es gelten folgende Bedingungen:

(1) Der Spline enthält die Stützstellen: $p_i(x_i) = y_i$ (i = 0 bis n-1) und $p_{n-1}(x_n) = y_n$

(2) Stetigkeit an den Stützstellen: $p_i(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}$ (i = 0 bis n-2)

(3) Gleiche Steigung an den Stützstellen: $p_i'(x_{i+1}) = p_{i+1}'(x_{i+1})$ (i = 0 bis n-2)

(4) Gleiche Krümmung an den Stützstellen: $p_i''(x_{i+1}) = p_{i+1}''(x_{i+1})$ (i = 0 bis n-2)

(5) Randbedingungen (minimale Krümmung des Splines): $p_0''(x_0) = 0$ und $p_{n-1}''(x_n) = 0$

Es ergeben sich somit 4n Gleichungen mit 4n Unbekannten , mit eindeutiger Lösung.

Entwicklung der Formeln:

Gegeben sind für i von 0 bis n-1 :

$$\mathbf{p_i(x) = a_ix^3 + b_ix^2 + c_ix + d_i} \qquad \mathbf{p_i'(x) = 3a_ix^2 + 2b_ix + c_i} \qquad \mathbf{p_i''(x) = 6a_ix + 2b_i}$$

(1) $a_ix_i^3 + b_ix_i^2 + c_ix_i + d_i = y_i$ (i = 0 bis n-1) und $a_{n-1}x_n^3 + b_{n-1}x_n^2 + c_{n-1}x_n + d_{n-1} = y_n$
(2) $a_ix_{i+1}^3 + b_ix_{i+1}^2 + c_ix_{i+1} + d_i = y_{i+1}$ (i = 0 bis n-2)
(3) $3a_ix_{i+1}^2 + 2b_ix_{i+1} + c_i - 3a_{i+1}x_{i+1}^2 - 2b_{i+1}x_{i+1} - c_{i+1} = 0$ (i = 0 bis n-2)
(4) $6a_ix_{i+1} + 2b_i - 6a_{i+1}x_{i+1} - 2b_{i+1} = 0$ (i = 0 bis n-2)
(5) $6a_0x_0 + 2b_0 = 0$ und $6a_{n-1}x_n + 2b_{n-1} = 0$

Anwendung der Formeln auf das Anfangsbeispiel (oben) :

Stützpunkte (0;-3) (6;0) (8;3) (9;9)
Wir haben hier n+1 = 4 Stützpunkte (i = 0 bis 3) , was einen Spline mit 3 Polynomen nahelegt.

Das 12 (4n) mal 13 (4n+1) - LGS lautet dann folgendermaßen:

$0^3a_0 + 0^2b_0 + 0c_0 + d_0 = -3$
$6^3a_1 + 6^2b_1 + 6c_1 + d_1 = 0$ 4 Gleichungen gemäß Bedingung (1)
$8^3a_2 + 8^2b_2 + 8c_2 + d_2 = 3$
$9^3a_2 + 9^2b_2 + 9c_2 + d_2 = 9$

$6^3a_0 + 6^2b_0 + 6c_0 + d_0 = 0$ 2 Gleichungen gemäß Bedingung (2)
$8^3a_1 + 8^2b_1 + 8c_1 + d_1 = 3$

$3a_0 \cdot 6^2 + 2b_0 \cdot 6 + c_0 - 3a_1 \cdot 6^2 - 2b_1 \cdot 6 - c_1 = 0$ 2 Gleichungen gemäß Bedingung (3)
$3a_1 \cdot 8^2 + 2b_1 \cdot 8 + c_1 - 3a_2 \cdot 8^2 - 2b_2 \cdot 8 - c_2 = 0$

$6a_0 \cdot 6 + 2b_0 - 6a_1 \cdot 6 - 2b_1 = 0$ 2 Gleichungen gemäß Bedingung (4)
$6a_1 \cdot 8 + 2b_1 - 6a_2 \cdot 8 - 2b_2 = 0$

$6a_0 \cdot 0 + 2b_0 = 0$ 2 Gleichungen gemäß Bedingung (5)
$6a_2 \cdot 9 + 2b_2 = 0$

Vereinfachtes LGS als Schema (·1 bedeutet konstante Spalte)

a_0	b_0	c_0	d_0	a_1	b_1	c_1	d_1	a_2	b_2	c_2	d_2	·1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-3
0	0	0	0	6^3	6^2	6	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	8^3	8^2	8	1	3
0	0	0	0	0	0	0	0	9^3	9^2	9	1	9
6^3	6^2	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	8^3	8^2	8	1	0	0	0	0	3
108	12	1	0	-108	-12	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	192	16	1	0	-192	-16	-1	0	0
36	2	0	0	-36	-2	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	48	2	0	0	-48	-2	0	0	0
0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	54	2	0	0	0

Lösung, zum Beispiel mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$a_0 = -1/184 \approx -0{,}0054347826$	$a_1 = 73/184 \approx 0{,}3967391304$	$a_2 = -35/46 \approx -0{,}760869565$
$b_0 = 0$	$b_1 = -333/46 \approx -7{,}239130435$	$b_2 = 945/46 \approx 20{,}54347826$
$c_0 = 16/23 \approx 0{,}6956521739$	$c_1 = 1015/23 \approx 44{,}13043478$	$c_2 = -4097/23 \approx -178{,}13043$
$d_0 = -3$	$d_1 = -2067/23 \approx -89{,}86956522$	$d_2 = 11565/23 \approx 502{,}826087$

Die 3 Polynome sind somit :

$p_0 = -1/184x^3 + 16/23x - 3$ für $0 \le x \le 6$
$p_1 = 73/184x^3 - 333/46x^2 + 1015/23x - 2067/23$ für $6 \le x \le 8$
$p_2 = -35/46x^3 + 945/46x^2 - 4097/23x + 11565/23$ für $8 \le x \le 9$

Nimmt man zu den oben angegebenen Punkten einen fünften hinzu, z.B. (10;16) , so muss man einen Spline mit 4 Polynomen erstellen. Es ist eine komplette Neuberechnung erforderlich.
Dies bedeutet ein LGS mit 16 Zeilen und 17 Spalten.

<u>Beispiel mit 5 Stützpunkten (Erweiterung des vorherigen Beispiels) :</u>

Stützpunkte (0;-3) (6;0) (8;3) (9;9) (10;16)
i = 0 1 2 3 4 (= n+1)

Das 16 mal 17 - LGS ist dann :

$0^3a_0 + 0^2b_0 + 0c_0 + d_0 = -3$ i=0
$6^3a_1 + 6^2b_1 + 6c_1 + d_1 = 0$ i=1
$8^3a_2 + 8^2b_2 + 8c_2 + d_2 = 3$ i=2
$9^3a_3 + 9^2b_3 + 9c_3 + d_3 = 9$ i=3
$10^3a_3 + 10^2b_3 + 10c_3 + d_3 = 16$ i=3

$6^3a_0 + 6^2b_0 + 6c_0 + d_0 = 0$ i=0
$8^3a_1 + 8^2b_1 + 8c_1 + d_1 = 3$ i=1
$9^3a_2 + 9^2b_2 + 9c_2 + d_2 = 9$ i=2

$3a_0\cdot 6^2 + 2b_0\cdot 6 + c_0 - 3a_1\cdot 6^2 - 2b_1\cdot 6 - c_1 = 0$ i=0
$3a_1\cdot 8^2 + 2b_1\cdot 8 + c_1 - 3a_2\cdot 8^2 - 2b_2\cdot 8 - c_2 = 0$ i=1
$3a_2\cdot 9^2 + 2b_2\cdot 9 + c_2 - 3a_3\cdot 9^2 - 2b_3\cdot 9 - c_3 = 0$ i=2

$6a_0\cdot 6 + 2b_0 - 6a_1\cdot 6 - 2b_1 = 0$ i=0
$6a_1\cdot 8 + 2b_1 - 6a_2\cdot 8 - 2b_2 = 0$ i=1
$6a_2\cdot 9 + 2b_2 - 6a_3\cdot 9 - 2b_3 = 0$ i=2

$6a_0\cdot 0 + 2b_0 = 0$ i=0
$6a_3\cdot 10 + 2b_3 = 0$ i=3

Vereinfachtes LGS:

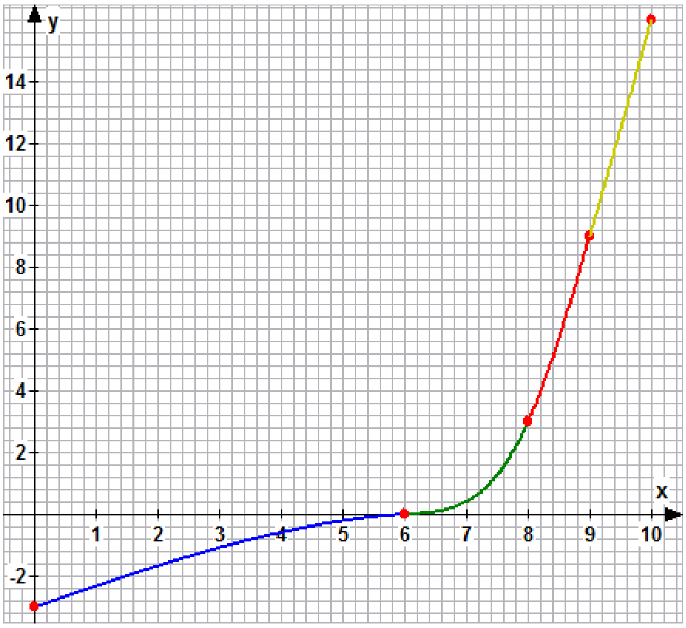
a_0	b_0	c_0	d_0	a_1	b_1	c_1	d_1	a_2	b_2	c_2	d_2	a_3	b_3	c_3	d_3	$\cdot 1$
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3
0	0	0	0	6^3	6^2	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	8^3	8^2	8	1	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9^3	9^2	9	1	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10^3	10^2	10	1	16
6^3	6^2	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	8^3	8^2	8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0	0	9^3	9^2	9	1	0	0	0	0	9
108	12	1	0	-108	-12	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	192	16	1	0	-192	-16	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	243	18	1	0	-243	-18	-1	0	0
36	2	0	0	-36	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	48	2	0	0	-48	-2	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	54	2	0	0	-54	-2	0	0	0
0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	60	2	0	0	0

Lösung:

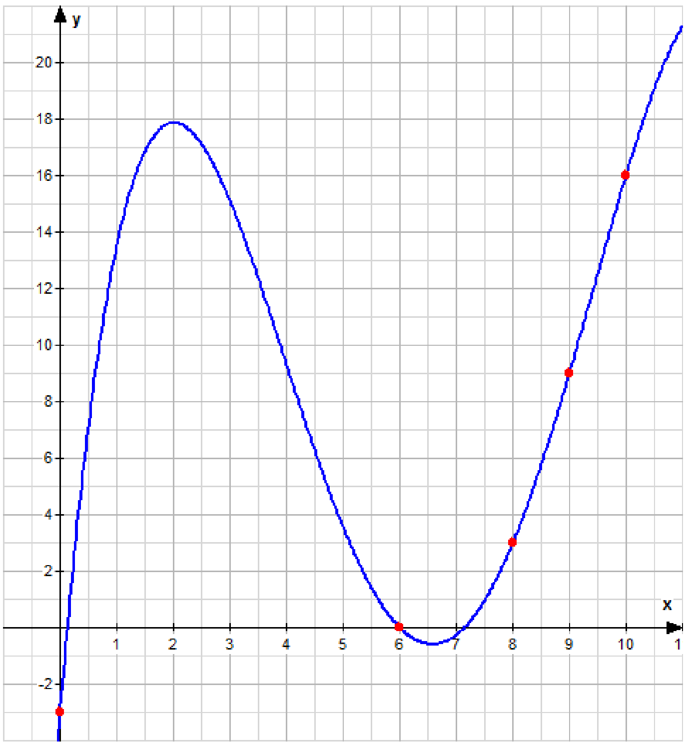
$a_0 = -1/192$ $b_0 = 0$ $c_0 = 11/16$ $d_0 = -3$
$a_1 = 25/64$ $b_1 = -57/8$ $c_1 = 695/16$ $d_1 = -177/2$
$a_2 = -11/16$ $b_2 = 75/4$ $c_2 = -2617/16$ $d_2 = 927/2$
$a_3 = -1/16$ $b_3 = 15/8$ $c_3 = -187/16$ $d_3 = 63/8$

Die 4 Polynome sind dann :

$p_0 = -0{,}00521x^3 + 0{,}6875x - 3$ für $0 \le x \le 6$
$p_1 = 0{,}390625x^3 - 7{,}125x^2 + 43{,}4375x - 88{,}5$ für $6 \le x \le 8$
$p_2 = -0{,}6875x^3 + 18{,}75x^2 - 163{,}5625x + 463{,}5$ für $8 \le x \le 9$
$p_3 = -0{,}0625x^3 + 1{,}875x^2 - 11{,}6875x + 7{,}875$ für $9 \le x \le 10$



Zum Vergleich: Ein bloßes Interpolationspolynom für die 5 Punkte sieht so aus:



Für den Schiffsbau ist dies natürlich völlig ungeeignet !

Anhang: Minimal-Beispiel mit lediglich 3 Stützpunkten (erfordert nur 2 Polynome !):

Mindestens 3 Punkte ($n+1=3$) sind zur Erfüllung der 5 Spline-Bedingungen erforderlich, da n mindestens den Wert 2 haben muss (s. Bedingungen (2), (3), (4)) !

Stützpunkte (0;-3) (6;0) (8;3)

Das 8 mal 9 – LGS ist dann :

$0^3a_0 + 0^2b_0 + 0c_0 + d_0 = -3$
$6^3a_1 + 6^2b_1 + 6c_1 + d_1 = 0$
$8^3a_1 + 8^2b_1 + 8c_1 + d_1 = 3$

$6^3a_0 + 6^2b_0 + 6c_0 + d_0 = 0$

$3a_0 \cdot 6^2 + 2b_0 \cdot 6 + c_0 - 3a_1 \cdot 6^2 - 2b_1 \cdot 6 - c_1 = 0$

$6a_0 \cdot 6 + 2b_0 - 6a_1 \cdot 6 - 2b_1 = 0$

$6a_0 \cdot 0 + 2b_0 = 0$
$6a_1 \cdot 8 + 2b_1 = 0$

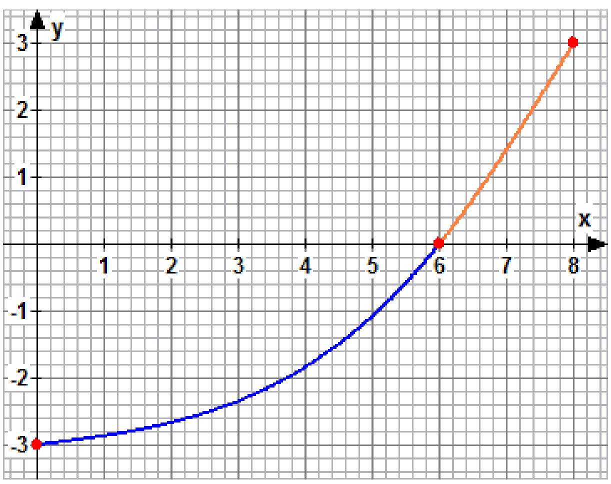
Vereinfachtes LGS:

a_0	b_0	c_0	d_0	a_1	b_1	c_1	d_1	$\cdot 1$
0	0	0	1	0	0	0	0	-3
0	0	0	0	6^3	6^2	6	1	0
0	0	0	0	8^3	8^2	8	1	3
6^3	6^2	6	1	0	0	0	0	0
108	12	1	0	-108	-12	-1	0	0
36	2	0	0	-36	-2	0	0	0
0	2	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	48	2	0	0	0

Lösung:
$a_0 = 1/96$ $b_0 = 0$ $c_0 = 1/8$ $d_0 = -3$
$a_1 = -1/32$ $b_1 = 3/4$ $c_1 = -35/8$ $d_1 = 6$

Die 2 Polynome sind dann :

$p_0 = 1/96x^3 + 1/8x - 3$ für $0 \le x \le 6$
$p_1 = -1/32x^3 + 3/4x^2 - 35/8x + 6$ für $6 \le x \le 8$



Vereinfachung des Rechenaufwands für die Spline-Polynome

Wie man sieht, ist der Rechenaufwand bei obigem Verfahren erheblich, denn es muss jeweils ein Lineares Gleichungssystem der Dimension (4n, 4n+1) gelöst werden.

Eine deutliche Reduzierung des Rechenaufwands erzielt man durch die Verwendung von n kubischen Polynomen, welche die folgende Form haben :

$$\boxed{\mathbf{p_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i} \quad (i = 0 \text{ bis } n-1)}$$

mit den beiden Ableitungen $\mathbf{p_i'(x) = 3a_i(x-x_i)^2 + 2b_i(x-x_i) + c_i}$ und $\mathbf{p_i''(x) = 6a_i(x-x_i) + 2b_i}$.

Zur Ermittlung der Formeln ist jedoch ein (einmaliger) erheblicher Umformungsaufwand erforderlich !

Um die 5 Bedingungen zum Erstellen der Spline-Polynome bequemer handhaben zu können, wird noch ein weiteres Polynom $p_n(x)$ hinzugenommen, wobei $p_n(x_n) = p_{n-1}(x_n) = y_n$ gelten soll. Somit erhält man:

(1) $p_i(x_i) = y_i$ (i = 0 bis n)

$a_i(x_i - x_i)^3 + b_i(x_i - x_i)^2 + c_i(x_i - x_i) + d_i = y_i \quad \rightarrow \quad \underline{\mathbf{d_i = y_i}}$ (i = 0 bis n)

(2) $p_i(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}$ (i = 0 bis n-1)

$a_i(x_{i+1}-x_i)^3 + b_i(x_{i+1}-x_i)^2 + c_i(x_{i+1}-x_i) + d_i = y_{i+1}$ (i = 0 bis n-1)

(3) $p_i'(x_i) = p_{i-1}'(x_i)$ (i = 1 bis n-1)

$3a_i(x_i - x_i)^2 + 2b_i(x_i - x_i) + c_i = 3a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1}$ (i = 1 bis n-1)

(4) $p_i''(x_{i+1}) = p_{i+1}''(x_{i+1})$ (i = 0 bis n-1)

$6a_i(x_{i+1}-x_i) + 2b_i = 6a_{i+1}(x_{i+1}-x_{i+1}) + 2b_{i+1}$ (i = 0 bis n-1)

(5) $p_0''(x_0) = 0$ und $p_n''(x_n) = 0$

$6a_0(x_0-x_0) + 2b_0 = 0$ und $6a_{n-1}(x_n-x_n) + 2b_n = 0$
$\rightarrow$ $\underline{\mathbf{b_0 = 0 \quad \text{und} \quad b_n = 0}}$

Ersichtlich tritt hier häufig die Differenz $x_{i+1} - x_i$ zweier benachbarten Stützstellen auf .
Daher ist die vereinfachte Schreibweise $\mathbf{h_i := x_{i+1} - x_i}$ sinnvoll.

Die 5 Bedingungen lassen sich unter Verwendung von $h_i = x_{i+1} - x_i$ und $d_i = y_i$ so schreiben :

(1) $\underline{\mathbf{d_i = y_i}}$ (i = 0 bis n)

(2) $a_i \cdot h_i^3 + b_i \cdot h_i^2 + c_i \cdot h_i + y_i = y_{i+1}$ (i = 0 bis n-1)

(3) $c_i = 3a_{i-1} \cdot h_{i-1}^2 + 2b_{i-1} \cdot h_{i-1} + c_{i-1}$ (i = 1 bis n-1)

(4) $3a_i \cdot h_i + b_i = b_{i+1}$ (i = 0 bis n-1)

(5) $\underline{\mathbf{b_0 = 0 \quad \text{und} \quad b_n = 0}}$

Durch Einsetzen und Umformen erhält man

(1) $\underline{\mathbf{d_i = y_i}}$ (i = 0 bis n)

(2) $a_i \cdot h_i^3 + b_i \cdot h_i^2 + c_i \cdot h_i = y_{i+1} - y_i$ (i = 0 bis n-1) $\rightarrow$ $c_i = (y_{i+1} - y_i - b_i \cdot h_i^2 - a_i \cdot h_i^3) / h_i$

(3) $c_i = 3a_{i-1} \cdot h_{i-1}^2 + 2b_{i-1} \cdot h_{i-1} + c_{i-1}$ (i = 1 bis n-1)

(4) $3a_i \cdot h_i = b_{i+1} - b_i$ (i = 0 bis n-1) $\rightarrow$ $\underline{\mathbf{a_i = (b_{i+1} - b_i) / (3h_i)}}$

(5) $\underline{\mathbf{b_0 = 0 \quad ; \quad b_n = 0}}$

Gleichung (4) wird in (2) verwendet:

(1) $\underline{\mathbf{d_i = y_i}}$ (i = 0 bis n)

(2) $c_i = (y_{i+1} - y_i - b_i \cdot h_i^2 - (b_{i+1} - b_i) / (3h_i) \cdot h_i^3) / h_i$
$\rightarrow$ $\underline{\mathbf{c_i = (y_{i+1} - y_i) / h_i - (2b_i + b_{i+1}) \cdot h_i / 3}}$ (i = 0 bis n-1)

(3) $c_i = 3a_{i-1} \cdot h_{i-1}^2 + 2b_{i-1} \cdot h_{i-1} + c_{i-1}$ (i = 1 bis n-1)

(4) $3a_i \cdot h_i = b_{i+1} - b_i$ (i = 0 bis n-1) $\rightarrow$ $\underline{\mathbf{a_i = (b_{i+1} - b_i) / (3h_i)}}$

(5) $\underline{\mathbf{b_0 = 0 \quad ; \quad b_n = 0}}$

Gleichung (2) und (4) werden in (3) verwendet:

(1) $\underline{\mathbf{d_i = y_i}}$ (i = 0 bis n)

(2) $c_i = (y_{i+1} - y_i - b_i \cdot h_i^2 - (b_{i+1} - b_i) / (3h_i) \cdot h_i^3) / h_i$
$\rightarrow$ $\underline{\mathbf{c_i = (y_{i+1} - y_i) / h_i - (2b_i + b_{i+1}) \cdot h_i / 3}}$ (i = 0 bis n-1)

(3) $(y_{i+1} - y_i) / h_i - (2b_i + b_{i+1}) \cdot h_i / 3 = (b_i - b_{i-1}) \cdot h_{i-1} + 2b_{i-1} \cdot h_{i-1} + (y_i - y_{i-1}) / h_{i-1} - (2b_{i-1} + b_i) \cdot h_{i-1} / 3$
(i = 1 bis n-1)

(4) $3a_i \cdot h_i = b_{i+1} - b_i$ (i = 0 bis n-1) $\rightarrow$ $\underline{\mathbf{a_i = (b_{i+1} - b_i) / (3h_i)}}$

(5) $\underline{\mathbf{b_0 = 0 \quad ; \quad b_n = 0}}$

Gleichung (3) vereinfachen und die d_i auf i = 0 bis n-1 beschränken :

$d_i = y_i$ (i = 0 bis n-1)

$b_0 = b_n = 0$

$\underline{h_{i-1} \cdot b_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) \cdot b_i + h_i \cdot b_{i+1} = 3(y_{i+1} - y_i) / h_i - 3(y_i - y_{i-1}) / h_{i-1} \quad (\text{ i = 1 bis n-1 }) \quad (*)}$
mit $h_i = x_{i+1} - x_i$ (i = 0 bis n-1)
folglich $h_{i-1} + h_i = x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i = x_{i+1} - x_{i-1}$

$a_i = (b_{i+1} - b_i) / (3h_i)$ (i = 0 bis n-1)

$c_i = (y_{i+1} - y_i) / h_i - (2b_i + b_{i+1}) \cdot h_i / 3$ (i = 0 bis n-1)

Dies liefert die Lösung für 4n unbekannte Größen a_i , b_i , c_i , d_i (i = 0 bis n-1)

Die unterstrichene Zeile (*) ist ein LGS zur Bestimmung der b_i (i = 1 bis n-1).

Mit den Einsetzungen für h_i und h_{i-1} erhält man die endgültigen Berechnungsformeln:

Für i = 0 bis n-1 :
$\mathbf{d_i = y_i}$

$\mathbf{b_0 = b_n = 0}$

Für i = 1 bis n-1 :
$\mathbf{(x_i - x_{i-1})\cdot b_{i-1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1})\cdot b_i + (x_{i+1} - x_i)\cdot b_{i+1} = 3\cdot[(y_{i+1} - y_i) / (x_{i+1} - x_i) - (y_i - y_{i-1}) / (x_i - x_{i-1})]}$

Für i = 0 bis n-1 :
$\mathbf{a_i = (b_{i+1} - b_i) / 3 / (x_{i+1} - x_i)}$

Für i = 0 bis n-1 :
$\mathbf{c_i = (y_{i+1} - y_i) / (x_{i+1} - x_i) - (2b_i + b_{i+1})\cdot(x_{i+1} - x_i) / 3}$

Das LGS-Schema zur Bestimmung der b_i (i = 0 bis n-1) sieht dann so aus:

	$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{b_2}$	$\mathbf{b_3}$	$\mathbf{b_4}$	**…**	$\mathbf{b_{n-3}}$	$\mathbf{b_{n-2}}$	$\mathbf{b_{n-1}}$	$\mathbf{\cdot 1}$
i=1	$2(x_2-x_0)$	x_2-x_1	0	0	...	0	0	0	$3\,\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} - 3\,\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$
i=2	x_2-x_1	$2(x_3-x_1)$	x_3-x_2	0	...	0	0	0	$3\,\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} - 3\,\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
i=3	0	x_3-x_2	$2(x_4-x_2)$	x_4-x_3	...	0	0	0	$3\,\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3} - 3\,\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$
	…		…		…	…		…	…
i=n-2	0	0	0	0	...	$x_{n-2}-x_{n-3}$	$2(x_{n-1}-x_{n-3})$	$x_{n-1}-x_{n-2}$	$3\,\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{x_{n-1}-x_{n-2}} - 3\,\frac{y_{n-2}-y_{n-3}}{x_{n-2}-x_{n-3}}$
i=n-1	0	0	0	0	...	0	$x_{n-1}-x_{n-2}$	$2(x_n-x_{n-2})$	$3\,\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} - 3\,\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{x_{n-1}-x_{n-2}}$

Das hier dargestellte Schema (ohne die rechte Seite mit ·1) für die b_i nennt man auch **Tridiagonalmatrix**, weil die einzigen von 0 verschiedenen Elemente in der Hauptdiagonale und den jeweiligen Diagonalen unterhalb und oberhalb der Hauptdiagonale stehen !
LGSe mit Tridiagonalmatrizen sind immer eindeutig lösbar.

Ist dieses LGS gelöst, so können auch a_i und c_i sehr einfach nach den obigen Formeln direkt berechnet werden !

Anwendung der Formeln auf das Beispiel (0;-3) (6;0) (8;3) (9;9) , also n = 3

$x_0 = 0$ $x_1 = 6$ $x_2 = 8$ $x_3 = 9$
$y_0 = -3$ $y_1 = 0$ $y_2 = 3$ $y_3 = 9$
Es gilt: $b_0 = 0$ $b_3 = 0$

LGS-Schema:

b1	**b2**	**·1**
2(8 – 0)	8 – 6	3(3-0)/(8-6) – 3(0+3)/(6-0)
8 – 6	2(9 – 6)	3(9-3)/(9-8) – 3(3-0)/(8-6)

Vereinfachung:

b1	**b2**	**·1**
16	2	3
2	6	27/2

Lösung des LGS :

$b_0 = 0$
$b_1 = -9/92 \approx -0{,}097826087$
$b_2 = 105/46 \approx 2{,}282608696$

Dann die a_i berechnen , unter Verwendung von $b_3 = 0$:

$a_0 = (b_1 - b_0) / (3h_0) = (-9/92 – 0) / 3 / (6 – 0) = -1/184 \approx -0{,}0054347826$
$a_1 = (b_2 - b_1) / (3h_1) = (105/46+9/92) / 3 / (8 – 6) = 73/184 \approx 0{,}3967391304$
$a_2 = (b_3 - b_2) / (3h_2) = (0 – 105/46) / 3 / (9 – 8) = -35/46 \approx -0{,}7608695652$

Und noch die c_i :

$c_0 = (y_1 – y_0) / h_0 – (2b_0 + b_1)\cdot h_0 /3 = (0 + 3) / 6 – (0 – 9/92) \cdot 6 / 3 = 16/23 \approx 0{,}6956521739$
$c_1 = (y_2 – y_1) / h_1 – (2b_1 + b_2)\cdot h_1 /3 = (3 – 0) / 2 - (-9/46 + 105/46) \cdot 2 / 3 = 5/46 \approx 0{,}10869565$
$c_2 = (y_3 – y_2) / h_2 – (2b_2 + b_3)\cdot h_2 /3 = (9 – 3) / 1 – (105/23+0) \cdot 1 / 3 = 103/23 \approx 4{,}47826087$

Ergebnis:

$p_0 = -1/184x^3 + 16/23x – 3$ für $0 \le x \le 6$
$p_1 = 73/184(x-6)^3 – 9/92(x-6)^2 + 5/46(x-6)$ für $6 \le x \le 8$
$p_2 = -35/46(x-8)^3 + 105/46(x-8)^2 + 103/23(x-8) + 3$ für $8 \le x \le 9$

Erweitert man jetzt dieses Beispiel um einen Stützpunkt, so kann man das LGS-Schema von oben verwenden. Man ergänzt lediglich ein Spalte und eine Zeile !

Punkte: (0;-3) (6;0) (8;3) (9;9) **(10;16)**

LGS-Schema:

b1	**b2**	**b3**	**·1**
2(8 – 0)	8 – 6	0	3(3-0)/(8-6) – 3(0+3)/(6-0)
8 – 6	2(9 – 6)	9 - 8	3(9-3)/(9-8) – 3(3-0)/(8-6)
0	9 – 8	2(10-8)	3(16-9)/(10-9) – 3(9-3)/(9-8)

Vereinfacht:

b1	**b2**	**b3**	**·1**
16	2	0	3
2	6	1	27/2
0	1	4	3

Vereinfacht:

b1	**b2**	**b3**	**·1**
16	2	0	3
0	46	8	105
0	1	4	3

Vereinfacht:

b1	**b2**	**b3**	**·1**
16	2	0	3
0	4	0	9
0	1	4	3

Vereinfacht:

b1	**b2**	**b3**	**·1**
32	0	0	-3
0	4	0	9
0	0	16	3

Lösung des LGS:
$b_0 = 0$
$b_1 = -3/32 \approx -0{,}09375$
$b_2 = 9/4 \approx 2{,}25$
$b_3 = 3/16 \approx 0{,}1875$

Es folgen (mit $b_4 = 0$!):
$a_0 = (b_1 - b_0) / (3h_0) = -3/32 / 3 / 6 = -1/192 \approx -0{,}0052083333$
$a_1 = (b_2 - b_1) / (3h_1) = 75/32 / 3 / 2 = 25/64 = 0{,}390625$
$a_2 = (b_3 - b_2) / (3h_2) = -33/16 / 3 / 1 = -11/16 = -0{,}6875$
$a_3 = (b_4 - b_3) / (3h_3) = -3/16 / 3 / 1 = -1/16 = -0{,}0625$
$c_0 = (y_1 - y_0) / h_0 - (2b_0 + b_1)\cdot h_0 /3 = 3 / 6 + 3/32 \cdot 6 / 3 = 11/16 = 0{,}6875$
$c_1 = (y_2 - y_1) / h_1 - (2b_1 + b_2)\cdot h_1 /3 = 3 / 2 - 33/16 \cdot 2 / 3 = 1/8 = 0{,}125$
$c_2 = (y_3 - y_2) / h_2 - (2b_2 + b_3)\cdot h_2 /3 = 6 / 1 - 75/16 \cdot 1 / 3 = 71/16 = 4{,}4375$
$c_3 = (y_4 - y_3) / h_3 - (2b_3 + b_4)\cdot h_3 /3 = 7 / 1 - 3/8 \cdot 1 / 3 = 55/8 = 6{,}875$

Ergebnis:

$p_0 = -1/192x^3 + 11/16x - 3$ für $0 \le x \le 6$
$p_1 = 25/64(x-6)^3 - 3/32(x-6)^2 + 1/8(x-6)$ für $6 \le x \le 8$
$p_2 = -11/16(x-8)^3 + 9/4(x-8)^2 + 71/16(x-8) + 3$ für $8 \le x \le 9$
$p_3 = -1/16(x-9)^3 + 3/16(x-9)^2 + 55/8(x-9) + 9$ für $9 \le x \le 10$