Komplexe Zahlen

© Ac 2016-2022

In der Menge ℝ der reellen Zahlen ist die Gleichung $x^2 = -1$ nicht lösbar .
Abhilfe schafft eine Zahlbereichserweiterung von der Menge ℝ auf die Menge ℂ der sogenannten komplexen Zahlen. Die Menge der komplexen Zahlen besteht aus allen Zahlen der Form

$$\boxed{z = a + i \cdot b \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad i^2 = -1}$$

a heißt „Realteil“ von z und b „Imaginärteil“ von z , Re(z) bzw. Im(z) . i heißt „Imaginäre Einheit“ .

Die Zahl $\bar{z}$ = a - ib heißt „konjugiert komplex“ zu z = a + ib .

In dieser neuen Menge hat die Gleichung $z^2 = -1$ die beiden komplexen Lösungen z = i und z = -i .
Für Addition und Multiplikation gelten die Gesetze: Kommutativges., Distributivges., Assoziativges. .

Jede komplexe Zahl läßt sich grafisch als Punkt (a;b) in der „Gaußschen Zahlenebene" veranschaulichen.

Beispiel: z = 4 + 3i = (4 ; 3)

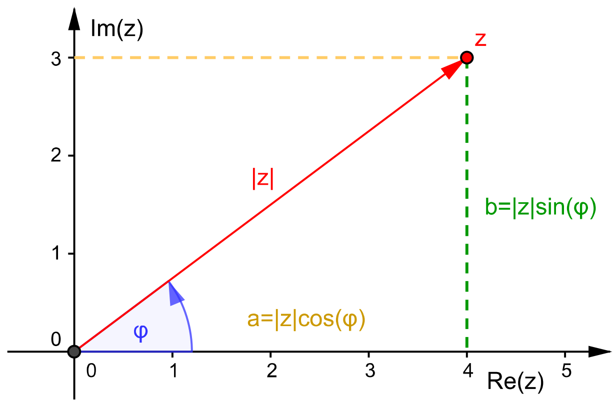
|z| heißt „Betrag“ von z und gibt die Entfernung vom Ursprung (0;0) zu z an.

Es gilt: $\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$ hier: |z|=5

φ heißt „Argument“ bzw. „Phase“ von z . Es gilt:

$$\boxed{\tan(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\frac{b}{a} \qquad s.(*)}$$

hier: tan(φ) = 0,75 ; φ ≈ 36,87° .

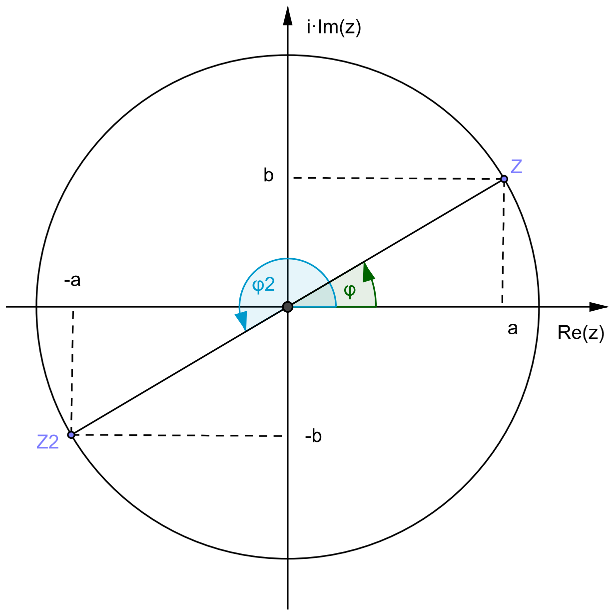


Außerdem gelten noch: a = |z|·cos(φ) sowie b = |z|·sin(φ)

z = |z|·cos(φ) + i · |z|·sin(φ) , also $\boxed{z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))}$ Polarform von z

Eine weitere Darstellung ist die ***Eulersche Formel:*** $z = |z| \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot [\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)]$
Diese Formel setzt i, e und π (z.B. $\mathbf{e}^{i \cdot 2\pi} = 1$) zueinander in Beziehung !

(*) Präzisierung: Berechnung des Winkels φ mittels arctan(b/a) (s.oben):



Aus der Beziehung tan(φ) = b / a folgt zwar φ = arctan (b / a), jedoch lassen sich auf diese Weise nicht alle möglichen Winkel φ zwischen 0° und 360° (Bogenmaß: 0 und 2 π) berechnen.

Die Grafik zeigt, dass die Winkel mit gleichem Tangenswert sich um je 180° (π) unterscheiden, je nachdem, ob a > 0 oder a < 0 gilt !
Hier ist φ2 = φ + π wegen a < 0 und b < 0 .
Für a > 0 und b < 0 gilt: φ2 = 2π - φ
Für a < 0 und b > 0 gilt: φ2 = π - φ

Außerdem sind noch die Sonderfälle für a = 0 bzw. b = 0 zu unterscheiden. Z.B. gilt bei a = 0 entweder φ = 90° (π/2) oder φ = 270° (3π/2) und bei b = 0 φ = 180° (π) oder φ = 0° (0) .

Es ergeben sich folgende Fälle zur Berechnung des Argumentes φ im Bereich [0 ; 2π] :

$$\varphi = \begin{cases} \text{nicht definiert, falls } a = 0 \wedge b = 0 \\ 0 \text{ , falls } b = 0 \wedge a > 0 \\ \pi \text{ , falls } b = 0 \wedge a < 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ , falls } a = 0 \wedge b > 0 \\ \frac{3\pi}{2} \text{ , falls } a = 0 \wedge b < 0 \\ \arctan\frac{b}{a} \text{ , falls } a > 0 \wedge b > 0 \\ \pi + \arctan\frac{b}{a} \text{ , falls } a < 0 \wedge b < 0 \\ 2\pi + \arctan\frac{b}{a} \text{ , falls } a > 0 \wedge b < 0 \\ \pi + \arctan\frac{b}{a} \text{ , falls } a < 0 \wedge b > 0 \end{cases} \quad \overset{\text{vereinfacht}}{\Rightarrow} \quad \varphi = \begin{cases} \text{nicht definiert, falls } a = 0 \wedge b = 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ , falls } a = 0 \wedge b > 0 \\ \frac{3\pi}{2} \text{ , falls } a = 0 \wedge b < 0 \\ \arctan\frac{b}{a} \text{ , falls } a > 0 \wedge b \geq 0 \\ 2\pi + \arctan\frac{b}{a} \text{ , falls } a > 0 \wedge b < 0 \\ \pi + \arctan\frac{b}{a} \text{ , falls } a < 0 \end{cases}$$

Beispiele:

1) $z = 0$ ergibt φ ist "nicht definiert"

2) $z = i$ ergibt $\varphi = \pi/2$

3) $z = -i$ ergibt $\varphi = -\pi/2$

4) $z = 1 + i$ ergibt $\varphi = \arctan(1) = \pi/4$

5) $z = 1 - i$ ergibt $\varphi = 2\pi + \arctan(-1) = 2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$

6) $z = -1 + i$ ergibt $\varphi = \pi + \arctan(-1) = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$

7) $z = -1 - i$ ergibt $\varphi = \pi + \arctan(1) = \pi + \pi/4 = 5\pi/4$

8) $z = 1$ ergibt $\varphi = 0$

9) $z = -1$ ergibt $\varphi = \pi$

Grundrechenarten und Potenzierung:

Addition (Subtraktion entsprechend):

z1 + z2 = a1 + i · b1 + a2 + i · b2 = **a1 + a2 + i · (b1 + b2)**

Beispiel: $z1 = 3+4i \quad z2 = -1+i \quad \Rightarrow z1+z2 = 2+5i$

Multiplikation:

z1 · z2 = (a1 + i · b1) · (a2 + i · b2)
= a1 · a2 + i · b1 · a2 + i · a1 · b2 – b1 · b2
= **a1 · a2 – b1 · b2 + i · (b1 · a2 + a1 · b2)**

Beispiel: $z1 = 4+3i \quad z2 = -1+i \quad \Rightarrow z1 \cdot z2 = 4\cdot(-1) - 3\cdot 1 + i\cdot(3\cdot(-1)+4\cdot 1) = -7+i$

Division:

z1 / z2 = (a1 + i · b1) / (a2 + i · b2)
= (a1 + i · b1) · (a2 - i · b2) / [(a2 + i · b2) · (a2 - i · b2)]
= (a1 · a2 + i · b1 · a2 - i · a1 · b2 + b1 · b2) / (a2² + b2²)
= **[a1 · a2 + b1 · b2 + i · (b1 · a2 - a1 · b2)] / (a2² + b2²)**

Beispiel: $z1 = 4+3i \quad z2 = -1+i \quad \Rightarrow z1/z2 = [4\cdot(-1)+3\cdot 1 + i\cdot(3\cdot(-1)-4\cdot 1)] \;/\; (1^2+1^2) = (-1-7i)/2$

Spezialfall: Kehrwert von z: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a - i\cdot b}{a^2+b^2} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

Potenzierung:

①Unter Verwendung des Binomischen Lehrsatzes:

$$z^n = (a+i\cdot b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot (i\cdot b)^k \;; \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \quad 0! = 1\;; \quad n \in \mathbb{N}$$

Für Potenzen von i gilt : $i^{4n} = 1 \quad i^{4n+1} = i \quad i^{4n+2} = -1 \quad i^{4n+3} = -i \;;\quad n \in \mathbb{Z}$

Beispiel: $$(4+3i)^3 = \sum_{k=0}^{3} \frac{3!}{k!(3-k)!} \cdot 4^{3-k} \cdot (3i)^k = 4^3\cdot(3i)^0 + 3\cdot 4^2 \cdot (3i)^1 + 3\cdot 4^1 \cdot (3i)^2 + 4^0 \cdot (3i)^3 =$$
$$64 + 144i - 108 - 27i = -44 + 117i$$

Die Ergebnisse sind dann übrigens immer exakt, jedoch ist der Rechenaufwand meist hoch !

②Unter Verwendung des De Moivreschen Satzes (Abraham de Moivre) und der Polarform:

[cos(φ) + i · sin(φ)] ^{n} = [cos(nφ) + i · sin(nφ)] ; n ∈ IN* Satz von De Moivre
z = | z | · [cos(φ) + i · sin(φ)] Polarform

Dann gilt die De Moivre - Formel :

$$z^n = |z|^n \cdot \left[\cos(n\cdot\varphi) + i\cdot\sin(n\cdot\varphi)\right]; \quad \varphi = \arctan\frac{b}{a}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

Anmerkung: Diese Formel gilt auch für rationale Exponenten, d.h. n kann ein Bruch sein !
Sie liefert im Allgemeinen wegen der trigonometrischen Berechnungen ungenaue Ergebnisse.

Beispiel: $(4+3i)^3 = |4+3i|^3 \cdot [\cos(3\cdot\arctan(0{,}75)) + i \cdot \sin(3\cdot\arctan(0{,}75))]$
$= \sqrt{(16+9)^3} \cdot (-0{,}352 + 0{,}936i) = 125 \cdot (-0{,}352 + 0{,}936i) = -44 + 117i$

Weitere Beispiele:

1) $(4+3i)^2 = 16 - 9 + 24i = 7 + 24i$ (Binomische Formel) .

Mit der De Moivre - Formel: $\varphi = \arctan(3/4)$:
$(4+3i)^2 = |4+3i|^2 \cdot [\cos(2\cdot\arctan(3/4) + i \cdot \sin(2\cdot\arctan(3/4)] = 25 \cdot (0{,}28 + 0{,}96i)$
$= 7 + 24i$

2) $(4+3i)^{-3} = 1 / (4+3i)^3 = 1 / [(4+3i)(7+24i)] = 1 / (28 + 21i + 96i - 72) = 1 / (-44 + 117i)$
$= (-44 - 117\cdot i) / 15625$. (Binomische Formel)

Mit der De Moivre - Formel:
$(4+3i)^{-3} = |4+3i|^{-3} \cdot [\cos(-3\cdot\arctan(3/4) + i \cdot \sin(-3\cdot\arctan(3/4)]$
$= \sqrt{(16+9)^{-3}} \cdot (-0{,}352 - 0{,}936i)$
$= 1/125 \cdot (-0{,}352 - 0{,}936i)$
$= 125/125^2 \cdot (-0{,}352 - 0{,}936i)$
$= (-44 - 117\cdot i) / 15625$

3) $(4+3i)^{-1,5} = 1 / (4+3i)^{3/2} = 1 / \sqrt{(4+3i)^3} = 1 / \sqrt{(-44+117i)}$
Für den Nenner des Bruches muss ein exaktes Ergebnis $a + bi$ gefunden werden !
Ansatz: $\sqrt{(-44+117i)} = a + bi$, d.h. $-44+117i = (a + bi)^2$
$a^2 - b^2 + 2abi = -44+117i$
Durch Vergleich der Terme folgt: $a^2 - b^2 = -44$ und $2ab = 117$
Wir setzen $b = 58{,}5 / a$ in $a^2 - b^2 = -44$ ein und erhalten:
$a^2 - (58{,}5 / a)^2 = -44$, also $a^2 - 3422{,}5/a^2 + 44 = 0$ bzw. $a^4 - 3422{,}5 + 44a^2 = 0$
Diese biquadratische Gleichung hat 2 Lösungen. Die erste ist $a = \sqrt{(40{,}5)}$.
Eine Lösung des Gleichungssystems ist daher : $a = \sqrt{(40{,}5)}$ und $b = 58{,}5 / \sqrt{(40{,}5)}$

Der Lösungsweg ist dann wie folgt:

$$(4+3i)^{-1,5} = \frac{1}{\sqrt{40{,}5} + \frac{58{,}5}{\sqrt{40{,}5}}i} = \frac{\sqrt{40{,}5}}{40{,}5+58{,}5i} = \frac{\sqrt{40{,}5}\cdot(40{,}5-58{,}5i)}{(40{,}5+58{,}5i)\cdot(40{,}5-58{,}5i)}$$

$$= \frac{\sqrt{9^2/2}}{5062{,}5}\cdot(40{,}5-58{,}5i) = \frac{\sqrt{2}}{1125}\cdot(40{,}5-58{,}5i) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{250}\cdot(9-13i)}$$

$$\approx 0{,}0509116882 - 0{,}0735391052\cdot i$$

Wie man sieht, kann man hier auf rein algebraischem Wege ein exaktes (Wurzel-)Ergebnis ermitteln !

Mit der De Moivre - Formel:
$(4+3i)^{-1,5} = |4+3i|^{-1,5} \cdot [\cos(-1{,}5\cdot\arctan(3/4) + i \cdot \sin(-1{,}5\cdot\arctan(3/4)]$
$\approx (16+9)^{-0,75} \cdot (0{,}5692099788 - 0{,}8221921916i)$
$\approx 0{,}0509116882 - 0{,}0735391052\cdot i$

Die n Lösungen der Gleichung $z^n = c$:

Wie wir oben in Beispiel 3 gesehen haben, kann man aus dem komplexen Ansatz $\sqrt{(c)} = z = a + b \cdot i$ 2 Lösungen herausfiltern, wovon oben nur eine hergeleitet wurde.
$\sqrt{(c)} = z$ kann man umformen zu $c = z^2$. Gesucht sind die beiden Lösungen dieser Gleichung

Verallgemeinerung:

Gegeben: $c = |c| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi));\ c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^*;\ \tan(\varphi) = \frac{\mathrm{Im}(c)}{\mathrm{Re}(c)}$. Gesucht: $z = \sqrt[n]{c};\ z \in \mathbb{C}$

Lösungen von $\mathbf{z^n = c}$:

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{|c|} \cdot [\cos(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}) + i \cdot \sin(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n})] \ ;\ k = 0, 1, 2,\ \dots\ n-1}$$

Beispiel: $\mathbf{z^5 = 4 + 3i}$.

Mit $|c| = |4+3i| = 5$ und $\tan(\varphi) = \frac{3}{4}$ bzw. $\varphi = \arctan(0{,}75)$ folgt:

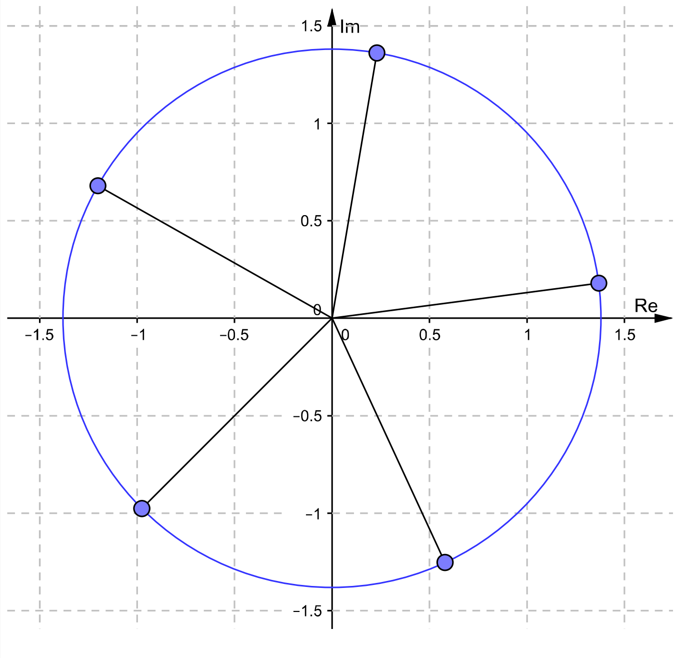
$$z_k = \sqrt[5]{5} \cdot [\cos(\frac{\arctan(0,75) + k \cdot 2\pi}{5}) + i \cdot \sin(\frac{\arctan(0,75) + k \cdot 2\pi}{5})] \ ;\ k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Näherungslösungen:

Phi (von z0) = 7,374°

Radius |z| = 1,38

z0 ≈ 1,36831868 + i·0,17708171
z1 ≈ 0,25441901 + i·1,35606965
z2 ≈ -1,21107908 + i·0,66101543
z3 ≈ -1,00290705 - i·0,94753965
z4 ≈ 0,59124844 - i·1,24662714



Die Lösungen liegen alle (in gleichem Abstand) auf einem Kreis mit Radius $r = \sqrt[5]{5} \approx 1{,}3797$

Weitere Berechnungen (jeweils für z = 4+3i):

1) 1/z = 1/(4+3i) = (4-3i)/(4-3i)/(4+3i) = (4-3i)/(4²+3²) = (4-3i)/25 .

2) 1/z² = 1/(4+3i)² = (4-3i)²/(4-3i)²/(4+3i)² = (4-3i)²/(4²+3²)² = (16-9-24i)/25² = (7-24i)/625 .
Dies sollte auch bei Verwendung der Moivreschen Formel herauskommen:
1/z² = 1/(25 · [cos(2arctan(0,75))+i·sin(2arctan(0,75))])
= 1/(25 · [0,28 + i·0,96]) = 1/(7+i·24) = (7-24i)/(7²+24²) = (7-24i)/625 .

Sonderfälle von $z^n = c$:

Wie oben zu sehen war, lässt sich φ nicht immer mithilfe von Im(c) durch Re(c) bestimmen.
Zum Beispiel gilt für **reelles c** : φ = 0, wenn c > 0, und φ = π, wenn c < 0 .

Beispiel 1: c = 1, n = 4 : Zu lösen ist **$z^4 = 1$**

Lösungsformel (φ = 0): $$z_k = \sqrt[4]{|1|} \cdot [\cos(\frac{0 + k \cdot 2\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{0 + k \cdot 2\pi}{4})] \;\; ; \;\; k = 0,1,2,3$$

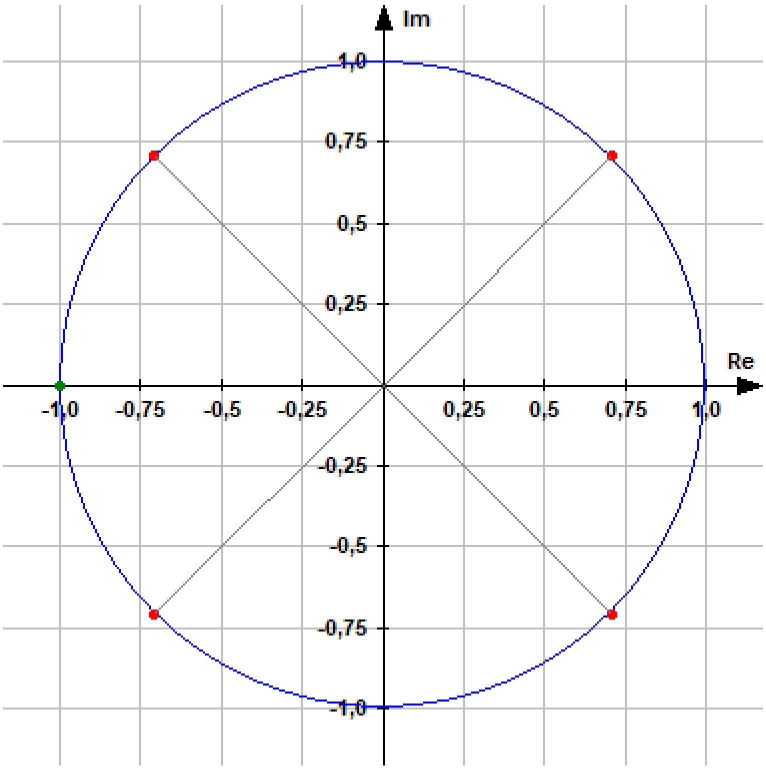
Es folgt: $z_0 = 1$ $z_1 = i$ $z_2 = -1$ $z_3 = -i$

Beispiel 2: c = -1, n = 4 : Zu lösen ist **$z^4 = -1$**

Lösungsformel (φ = π): $$z_k = \sqrt[4]{|-1|} \cdot [\cos(\frac{\pi + k \cdot 2\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi + k \cdot 2\pi}{4})] \;\; ; \;\; k = 0,1,2,3$$

Es folgt:
$z_0 = [\sqrt{(2)} + i \cdot \sqrt{(2)}]/2$ $z_1 = [-\sqrt{(2)} + i \cdot \sqrt{(2)}]/2$ $z_2 = [-\sqrt{(2)} - i \cdot \sqrt{(2)}]/2$ $z_3 = [\sqrt{(2)} - i \cdot \sqrt{(2)}]/2$

Grafik:



Verallgemeinerung von Beispiel 1 ("Kreisteilung" ; "n-te Einheitswurzel"):

$$\boxed{z^n = 1 \;\; \Rightarrow \;\; z_k = \cos(\frac{k \cdot 2\pi}{n}) + i \cdot \sin(\frac{k \cdot 2\pi}{n}) \;\; ; \;\; k = 0, 1, 2, ..., n-1}$$

Verallgemeinerung von Beispiel 2:

$$\boxed{z^n = -1 \;\; \Rightarrow \;\; z_k = \cos(\frac{\pi + k \cdot 2\pi}{n}) + i \cdot \sin(\frac{\pi + k \cdot 2\pi}{n}) \;\; ; \;\; k = 0, 1, 2, ..., n-1}$$