Langzahlarithmetik implementieren

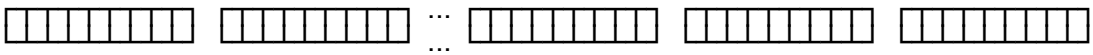
Ac 1990 bis 2021

Wie konstruiert man einen BigInteger-Typ (Langzahlarithmetik) ?

Zur Berechnung von sehr großen Ganzzahlen („BigIntegers“) kann man **„Register“** (Arrays bzw. Felder) verwenden, die eine bestimmte Anzahl von Ziffern (alle zwischen 0 und 9) aufnehmen. Nimmt man z.B. **9** Ziffern pro Register, so hat man das 1000000000-System, d.h. anstelle der Basis 10 verwenden wir nun die **Basis 1000000000** = 10^9 . Warum 10^9 ? Dies wird weiter unten erläutert !

Die Ziffern zur Basis 1000000000 werden in einem Feld x[0..n-1] vom Typ Integer abgespeichert. Besteht der zu verarbeitende BigInteger x also aus anzSt = 10000 Stellen, so muss man ein Feld mit n = 10000 div 9 + 1 = 1112 Registern bereitstellen, also x[0] bis x[1111] .
Allgemein: x[0] bis x[anzSt div 9] . Ist der Rest der Division 0, so genügen anzSt div 9 Register.

Grafische Veranschaulichung der n Register x mit jeweils 9 Ziffern:



Beispiel: n=25 Stellen x = 8530014744010226159260008

Es werden 25 div 9 + 1 Register, also 3 Register x[0] bis x[2] benötigt. Die Aufteilung ist wie folgt:
8530014 744010226 159260008
x[2] x[1] x[0]

Wie man sieht, kann die Anzahl der einzelnen Ziffern eines Registers auch kleiner als 9 sein.

- In den Registern Nr. 0 bis n-2 müssen alle Zahlen positiv sein !

- Negative BigInteger-Zahlen haben im Register Nr. n-1 eine negative Integer-Zahl

Beispiel: -123456789012345678901234 5 ⟶ -1234567 890123456 789012345

- Die größtmögliche **Summe** ist 999999999 + 999999999 = 1999999998
  Dies liegt noch innerhalb des IntegerBereichs (allerdings mit "Überlauf" bzgl. Basis 10^9):
  Integer-Bereich: $[-2^{31} ; 2^{31}-1] = [-2147483648 ; 2147483647]$

- Das größtmögliche **Produkt** ist $999999999 \cdot 999999999 = 999999998000000001$
  Diese Zahl übersteigt den IntegerBereich bei Weitem; hier eignet sich der Datentyp
  Int64 = $[-2^{63} ; 2^{63}-1] = [-9223372036854775808 ; 9223372036854775807 \approx 9 \cdot 10^{18}]$

Programmiert man mit **Delphi (bzw. Lazarus)**, so kann man den Datentyp **Int64** verwenden.

Bei Verwendung von **Java** eignet sich der Datentyp **long** .

Hinweis: Java besitzt bereits einen (eingebauten) Datentyp BigInteger !!

Wie erzeugt man einen BigInteger x ?

Am besten gibt man einen String vor , z.B. s = '12676506002282294014967032053 76' .
s wird (von rechts nach links) in Register aufgeteilt: 1267 650600228 229401496 703205376

Wir erhalten 4 Register x[3] = 1267 x[2] = 650600228 x[1] = 229401496 x[0] = 703205376

Algorithmus:

```
n = Länge von s  ( hier = 31 )
anzRegs = n div 9 + 1  ( hier = 31 div 9 + 1 = 3 + 1 = 4 )
i = 0
wiederhole
    falls n = 0  dann Abbruch
    falls  n < 9
       x[i] = intWert(s)
       Abbruch
     x[i] = intWert( s[ n - 8 ] ... s[ n ] )
     Streiche die letzten 9 Stellen von s und bestimme die Länge n des neuen s
     i = i + 1
bis  i = anzRegs
```

Am wichtigsten sind die **Grundrechenarten im 1 000 000 000-System:**

1) Summe c = a + b :

Maximal kann die Summe zweier Register 999999999 + 999999999 = 1999999998 sein.
Daher kann man die Addition sogar im Integer-Bereich durchführen (vgl. Rechnung oben) .

Algorithmus:

```
n = Maximum der Längen von a und b
übertrag = 0
für i von 0 bis n-1 wiederhole
   c[i] = a[i] + b[i] + übertrag
   falls c[i] < basis
      dann übertrag = 0
      sonst
        übertrag = 1
        c[i] = c[i] – basis
falls übertrag = 1
   n = n + 1
   c[n-1] = 1
```

Beispiel (2 Register):

	x[1]	x[0]
a	995315926	814210325
b	904707996	538980214

Die Summe c = a + b wird von rechts nach links mit Übertrag (0 oder 1) gebildet.
Ein zusätzliches Register x[2] ist dann erforderlich, wenn das Ergebnis von x[1] überläuft.
Dies ist übrigens beim Beispiel der Fall !

1. x[0] von a + x[0] von b = x[0] von c = 1353190539
Da x[0]>Basis, wird die Basis subtrahiert und der Übertrag 1 notiert: x[0]=**353190539**; Übertrag=1
2. x[1] von a + x[1] von b + Übertrag = x[1] von c = **900023923** ; Übertrag = 1
3. Übertrag bei x[1] entstanden, also x[2] von c = Übertrag von x[1] = **1**

Die Zeichenkette x[2] x[1] x[0] stellt dann die Summe c dar.
c = **1 900023923 353190539** (19 Stellen)

2) Differenz c = a - b :

Günstig ist es, a größer als b vorauszusetzen, da dann jedes Ergebnis-Register positiv ist. Es entsteht dann auch kein zusätzliches Register.
Falls a < b, dann vertauscht man a mit b und setzt vor das Ergebnis ein Minuszeichen.
Auch die Differenzbildung kann (wie die Summenbildung) im Integer-Bereich durchgeführt werden.

Algorithmus:

```
n = Maximum der Längen von a und b
übertrag = 0
für i von 0 bis n-1 wiederhole
   c[i] = a[i] - b[i] - übertrag
   falls c[i] < 0
      dann
        übertrag = 1
        c[i] = c[i] + basis
      sonst übertrag = 0
```

Beispiel (2 Register):

	x[1]	**x[0]**
a	995315926	314210325
b	904707996	538980214

Die Differenz c = a - b wird von rechts nach links mit Übertrag (0 oder 1) gebildet.

1. x[0] von a - x[0] von b = x[0] von c = -224769889
Da x[0] < 0, wird die Basis addiert und der Übertrag 1 notiert: x[0] = 775230111 ; Übertrag = 1
2. x[1] von a - x[1] von b - Übertrag = x[1] von c = 90607929

Die Zeichenkette x[1] x[0] stellt dann die Differenz c dar. c = **90607929 775230111** (17 Stellen)

3) Produkt c = a · b :

Das Produkt kann wegen des möglichen Integer-Überlaufs nur im int64-Bereich (long-Bereich) durchgeführt werden (vgl. Einleitung) .

A) Produkt eines BigIntegers mit einem Integer. Der einfachere der beiden Fälle:

Algorithmus:

```
n = Länge von a
übertrag = 0
für i von 0 bis n-1 wiederhole
   c[i] = a[i]· b + übertrag
   falls c[i] < basis
      dann übertrag = 0
      sonst
        übertrag = c[i] div basis
        c[i] = c[i] mod basis
falls übertrag > 0
   n = n + 1
   c[n-1] = übertrag
```

Beispiel (2 Register):

	x[1]	**x[0]**		
a	995315926	314210325	b	538980214

Das Produkt c = a · b wird von rechts nach links mit Übertrag gebildet.

1. x[0] von a · b = x[0] von c = 169353148209509550
Da x[0] > Basis, wird ein Übertrag berechnet mittels x[0] div Basis: Übertrag = 169353148
x[0] wird ersetzt durch x[0] mod Basis: x[0] von c = **209509550**
2. x[1] von a · b + Übertrag = x[1] von c = 536455590962441312

Da x[1] > Basis, wird ein Übertrag berechnet mittels x[1] div Basis: Übertrag = 536455590
x[1] wird ersetzt durch x[1] mod Basis: x[1] von c = **962441312**
3. Übertrag = x[2] von c = **536455590**

Die Zeichenkette x[2] x[1] x[0] stellt dann das Produkt c dar. c = **536455590 962441312 209509550**

B) Produkt zweier BigIntegers:

Algorithmus:

```
n1 = Länge von a
n2 = Länge von b
n = n1 + n2  // Länge von c
für i von 0 bis n-1 wiederhole
   c[i] = 0
für i von 0 bis n1-1 wiederhole
   übertrag = 0
   für k von 0 bis n2-1 wiederhole
      tmp = a[i]  // tmp vom Datentyp int64 bzw. long !!
      übertrag = übertrag div basis + tmp· b[k] + c[i+k]
      c[i+k] = übertrag mod basis
   c[i+n2] = übertrag div basis
```

Beispiel (2 Register):

	x[1]	**x[0]**
a	000023410	074658394
b	000007631	110240019

Das Produkt c = a · b wird von rechts nach links mit Übertrag gebildet.

1. x[0] von a · x[0] von b = x[0] von c = 8230342773069486
Da x[0] > Basis, wird ein Übertrag berechnet mittels x[0] div Basis: Übertrag = 8230342
x[0] wird ersetzt durch x[0] mod Basis: x[0] von c = **773069486**
2. x[0] von a · x[1] von b + Übertrag = x[1] von c = 569726434956
Da x[1] > Basis, wird ein Übertrag0 berechnet mittels x[1] div Basis: Übertrag0 = 569
x[1] wird ersetzt durch x[1] mod Basis: x[1] von c = 726434956
3. x[1] von a · x[0] von b + x[1] von c = x[1] von c = 2581445279746
Da x[1] > Basis, wird ein Übertrag berechnet mittels x[1] div Basis: Übertrag = 2581
x[1] wird ersetzt durch x[1] mod Basis: x[1] von c = **445279746**
4. x[1] von a · x[1] von b + Übertrag+Übertrag0 = x[2] von c = 178644860 ; Übertrag = 0

Die Zeichenkette x[2] x[1] x[0] stellt dann das Produkt c dar. c = **178644860 445279746 773069486**

4) Quotient c = a div b (sowie rest = a mod b):

Es gibt 2 Fälle:

A) Division eines BigIntegers durch einen Integer. Der einfachere der beiden Fälle:

Algorithmus:

```
n = Länge von a
übertrag = 0
für i von n-1 ab bis 0 wiederhole
   tmp = a[i] + übertrag · basis
   c[i] = tmp div b
   übertrag = tmp mod c[i]
rest = übertrag
```

Beispiel (2 Register):

	x[1]	x[0]		
a	995315926	314210325	b	538980214

Der Quotient c = a div b wird von links nach rechts mit Übertrag gebildet.

1. x[1] von a div b = x[1] von c = **1**
Übertrag = x[1] von a - x[1] von c · b : Übertrag = 456335712
2. (x[0] von a + Übertrag · Basis) div b = x[0] von c = **846665054**
Übertrag = (x[0] von a + Übertrag · Basis) - x[0] von c · b : Übertrag = 322968769
Rest = Übertrag = 322968769

Es gilt also: c = a DIV b = **1 846665054** und rest = a MOD b = **322968769**

B) Division zweier BigIntegers:

Der (ganzzahlige) Quotient c = a div b wird bestimmt durch sukzessive Differenzbildung von a – b .
Der Algorithmus stoppt, wenn a – b < 0, d.h. wenn a kleiner ist als b .
a div b ist dann gleich der Anzahl k der Subtraktionen mit positivem Ergebnis für a – b .
Das vorletzte Ergebnis der Subtraktionen ist gleich dem ganzzahligen Rest a mod b !
Dieser Algorithmus ist sehr langsam (wegen der langsamen Subtraktion) !!
Aus diesem Grund wird hier ein wesentlich schnellerer Algorithmus angegeben:

Besserer (schnellerer) Algorithmus:

```
n = Maximum der Längen von a und b
c = 0
falls a < b
   rest = a
   Abbruch
falls a = b
   rest = 0
   c = 1
   Abbruch
bAlt = b
wiederhole
   b = 2 · b
bis b ≥ a
wiederhole
   c = 2 · c
   b = b / 2
   falls a ≥ b
      a = a – b
      c = c + 1
bis bAlt ≥ b
rest = a
falls bAlt = a
   c = c + 1
   rest = 0
```

Beispiel1 (2 Register):

	x[1]	x[0]
a	000001589	993310697
b	000000470	799680214

0. bAlt = 470 799680214
1. b = 2b bis b >= a — b = 1883 198720856
2. c = 2c b = b/2 — c = 0 — b = 941 599360428
3. a >= b, also a = a-b c = c+1 — c = 1 — a = 648 393950269
4. c = 2c b=b/2 — c = 2 — b = 470 799680214
5. a >= b, also a = a-b c = c+1 — c = **3** — a = 177 594270055
6. bAlt = b, also Abbruch der Schleife

Es gilt also: a DIV b = 3 und a MOD b = 177 594270055

Beispiel1 (2 Register):

	x[1]	x[0]
a	000000034	359738368
b	000000004	294967296

0. bAlt = 4 294967296
1. b = 2b bis b >= a — b = 34 359738368
2. c = 2c b = b/2 — c = 0 — b = 17 179869184
3. a >= b, also a = a-b c = c+1 — c = 1 — a = 17 179869184
4. c = 2c b=b/2 — c = 2 — b = 8 589934592
5. a >= b, also a = a-b c = c+1 — c = **3** — a = 8 589934592
6. c = 2c b=b/2 — c = 6 — b = 4 294967296
7. a >= b, also a = a-b c = c+1 — c = 7 — a = 4 294967296
8. bAlt = b , also Abbruch der Schleife

Wegen bAlt = a ist c = c + 1 = 8 und rest = 0

Es gilt also: a DIV b = 8 und a MOD b = 0

Weitere Funktionen im 1 000 000 000-System:

1) Fakultät fak = n! :

Es ist n! = 1·2·3· ... ·(n-1)·n

Dies ist eine sehr schnell wachsende Funktion. Daher sollte man n aus dem Integer-Bereich wählen.
Zum Beispiel ist 5! = 120. Aber bereits $100! \approx 9{,}3 \cdot 10^{157}$ übertrifft die Kapazität gewöhnlicher TRs .
Der Wert von $1000! \approx 4 \cdot 10^{2567}$ zeigt den rasanten Anstieg der Funktion .

Algorithmus:

```
fak = 1
für i von 2 bis n wiederhole
   fak = fak · i ;
```

Benötigt wird hier die Multiplikation eines BigIntegers mit einem Integer.

2) Binomialkoeffizient („n über k"): $bino = \binom{n}{k}$; $n \geq k$

Es gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-2))\cdot(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (k-2)\cdot(k-1)\cdot k} =$$

$$\frac{(n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdot\ldots\cdot(n-k+(k-1))\cdot(n-k+k)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (k-2)\cdot(k-1)\cdot k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-k+i}{i}$$

Auch hier wachsen die Werte sowie auch die Rechenzeiten schnell an.
Daher sollte man n und k aus dem Integer-Bereich wählen.
Zum Beispiel ist $\binom{10}{5} = 252$. Aber bereits $\binom{400}{200} \approx 1{,}03 \cdot 10^{119}$ übertrifft die Kapazität gewöhnlicher TRs .
Weitere Ergebnisse: $\binom{10000}{6000} \approx 5{,}8 \cdot 10^{2920}$ sowie $\binom{200000}{100000} \approx 1{,}8 \cdot 10^{60203}$.

Algorithmus(optimiert):

```
falls n < k
   bino = 0
   Abbruch
falls n < k + k
   k = n - k
falls k = 0
   bino = 1
   Abbruch
falls k = 1
   bino = n
   Abbbruch
bino = n-k+i   // der Startwert
für i von 2 bis k wiederhole
   bino = bino·(n-k+i) div i
```

Benötigt werden einfache Multiplikation und einfache Division von BigInteger und Integer !

Beispiel: n = 10 k = 5

bino = 10-5+1 = 6
bino = 6 * (10-5+2) div 2 = 42 div 2 = 21
bino = 21 * (10-5+3) div 3 = 168 div 3 = 56
bino = 56 * (10-5+4) div 4 = 504 div 4 = 126
bino = 126 * (10-5+5) div 5 = 1260 div 5 = **252**

3) kHn = k hoch n (Potenzierung):

k ist hier eine BigInteger-Zahl und n ein Integer. k wird (n-1)-mal mit k multipliziert

Algorithmus(optimiert):

```
kHn = 1;
solange n > 0
   falls n mod 2 = 1 ; n ungerade
      kHn = kHn·k
   k = k·k
   n = n div 2
```

Beispiel: k = 8 n = 5
kHn = 1
kHn = 1 · 8 = 8
k = 8 · 8 = 64
n = 5 div 2 = 2
k = 64 · 64 = 4096
n = 2 div 2 = 1
kHn = 8 · 4096 = **32768**
k = 4096 · 4096 = 16777216
n = 1 div 2 = 0

4) pMod = (basis hoch expo) mod m („Powermod“):

Es gilt folgende Formel:

$$pMod = basis^{expo} \bmod m = \begin{cases} (basis^{expo/2} \bmod m)^2 \bmod m \ ; \ \text{expo } gerade \\ (basis^{expo-1} \bmod m) \cdot basis \bmod m \ ; \ \text{expo } ungerade \end{cases}$$

Algorithmus(optimiert):

```
pMod = 1;
solange expo > 0
   falls expo mod 2 = 1   ; expo ungerade
      pMod = (pMod· basis) mod m;
   expo = expo >> 1; // Shift right !
   basis = (basis·basis) mod m;
```

Beispiel: basis = 3 expo = 9 m = 17
pMod = 1
pMod = 1·3 mod 17 = 3
expo = 9 div 2 = 4
basis = 3^2 mod 17 = 9
expo = 4 div 2 = 2
basis = 9^2 mod 17 = 13
expo = 2 div 2 = 1
basis = 13^2 mod 17 = 16
pMod = 3·16 mod 17 = **14**
expo = 1 div 2 = 0
basis = 16^2 mod 17 = 1

5) ggT = ggT(a, b) :

Es wird der Euklidische Algorithmus verwendet (a, b >= 0 , ggT > 0) :

```
solange b > 0
   tmp = a mod b
   a = b
   b = tmp
ggT = a
```

Anschließend kann noch das kgV berechnet werden mit: kgV = a·b / ggT .

6) zufZahl = random(x0,a,c,m) :

Zufallszahlen berechnet man am besten mit der LEHMER-Methode, wobei eine Folge von "zufälligen" Zahlen generiert wird, die in eine Periode läuft:

Linearer Kongruenzgenerator nach D.H.Lehmer (1948)

Formel: **xn+1 = (a·xn + c) mod m** ; für Startwert x0 (möglichst Systemzeit nehmen !)

Soll die Periode = m sein, so beachte man 3 Bedingungen:

(1) c und m teilerfremd
(2) a-1 ist ein Vielfaches jedes Primteilers von m
(3) falls m ein Vielfaches von 4 ist, so ist es auch a-1

Algorithmus:

```
    zufZahl = x0
wiederhole
   zufZahl = (a·zufZahl + c) mod m
bis Abbruch
```

7) Primzahltest (probabilistisch) :

Der Primzahltest nach Miller-Rabin wird verwendet:
Hier eine Java-Methode mit dem Datentyp long.
Für BigIntegers müssen die entsprechenden Anweisungen umgeschrieben werden.

```
public static boolean istPrimMillerRabin(long n) {
	// probabilistische Methode für ungerade n>2
	long a, x, k = 20; // Test wird max. 20-mal durchlaufen

	// n-1 = 2^s·d ;  (d ungerade) erzeugen
	long d = n - 1;
	int s = 0;
	while (d % 2 == 0) {
		d = d / 2;
		s = s + 1;
	}
	System.out.println("d= " + d + "  s=" + s); // Test

	for (long i = 1; i <= k; i++) {
		a = 2 + (long) (Math.random() * (n - 2)); // a = random(2,n-1);
		System.out.println("a= " + a); // Test

		// Berechnung von x = a^d mod n
		x = powerMod(a,d,n);
		System.out.println("x= " + x); // Test
		if (x == 1 || x == n - 1)
		continue;
		for (int r = 1; r < s; r++) {
			x = x * x % n;
			if (x == 1)
				return false;
			if (x == n - 1)
				break;
		}
		if (x != n - 1)
			return false;
	}
	return true; // wahrscheinlich ist n prim
}
```

8) atan = arctan(x) :

Auch reelle Ergebnisse kann man ermitteln, z.B. den Arcustangens:

$$\arctan(x) \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + -...+ (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \;;\; |x| \le 1$$

Hier muss man zusätzlich zu der vorgegebenen (gewünschten) Stellenzahl noch einige Zusatzstellen (Schutzstellen) verwenden, damit die Ergebnisse nicht ungenau werden.

Statt x verwenden wir den Bruch p / q mit den Integers p und q .

```
public static void init(int gesStellen) {
   int z = gesStellen + cZusatzRegister*cRegStellen;
   kmax = (int) (1.0 + z / Math.log10(q/p));
   anzahlRegs = z / cRegStellen;
   regSumX = new long[anzahlRegs+1];  regSum5[0]=p;
   regXpot = new long[anzahlRegs+1];   regXpot[0]=p;
   regXdurchK = new long[anzahlRegs+1];
}
```

```
public static int[] atan(int p, int q) {
   if (p == 0) return {0};
   boolean negativ;
   int k;
   // berechne arctan (p / q)
   regXpot = RegQuotient(regXpot, q, anzahlRegs); // x = p/q
   regSumX = RegQuotient(regSumX, q, anzahlRegs); // summe = p/q
   negativ = true;
   k = 1;
   while (k < kmax) {
      k += 2;
      regXpot = RegQuotient(regXpot, q*q, anzahlRegs);
      regXdurchK = RegQuotient2(regXpot, k, anzahlRegs);
      if (negativ) {
         regSumX = RegDifferenz(regSumX, regXdurchK, anzahlRegs);
         negativ = false;
      } else { // Vorzeichen +
         regSumX = RegSumme(regSumX, regXdurchK, anzahlRegs);
         negativ = true;
      }
   } // while
   return regSumX;
}
```

Anhang : Schnelle Operationen für Zweierpotenzen (Pascal-Syntax):

```
procedure setBit(var x: LongWord; bitNr: Byte);
  begin x := x or (1 shl bitNr); end;

procedure clearBit(var x: LongWord; bitNr: Byte);
  begin x := x and not (1 shl bitNr); end;

procedure mal2(var x, carry: LongWord);
  begin carry := x shr 15;  x := x shl 1; end;

procedure durch2(var x: LongWord);
  begin x := x shr 1; end;

procedure differenz(var diff: LongWord; a, b: LongWord);
begin
 b := not b;  // Zweierkomplement des Subtrahenden b
 b := b+1; // um 1 erhöhen
 diff := a+b;   // und zu a addieren!
end;

procedure produkt(var prod: LongWord; a, b: LongWord);  // russische Bauernmultiplikation
begin
 prod = 0;
 while b > 0 do begin
   if odd(b) then prod := prod+a;   //  odd(b):   prüfen, ob bit Nr. 0 von b gesetzt ist !
   a := a shl 1;                    //  a := a * 2;        b:    111010010000101   ungerade !
   b := b shr 1;                    //  b := b / 2;
 end;
end;
```