Approximation der Kreiszahl π Ac 2013

Es ist π/4 = arctan(1) = 1 – 1/3 + 1/5 – 1/7 + 1/9 -+ … (Reihenentwicklung von Gregory und Leibniz).

Jedoch eignet sich arctan(**1**) wegen der schwachen Konvergenz der arctan-Reihe an der Stelle x=1 **nicht** zur Berechnung von π . Vielmehr konstruiert man sich geeignete Kombinationen von arctan-Reihen mit **kleinen x-Werten** . Für diese Reihen findet man in der Literatur sog. Geschwindigkeits-Indizes (gi) .
Je kleiner gi, um so besser ist die Reihe zur Berechnung geeignet.
Die gi errechnen sich aus der Summe der reziproken Logarithmuswerte der arctan-Nenner (s.u.) !

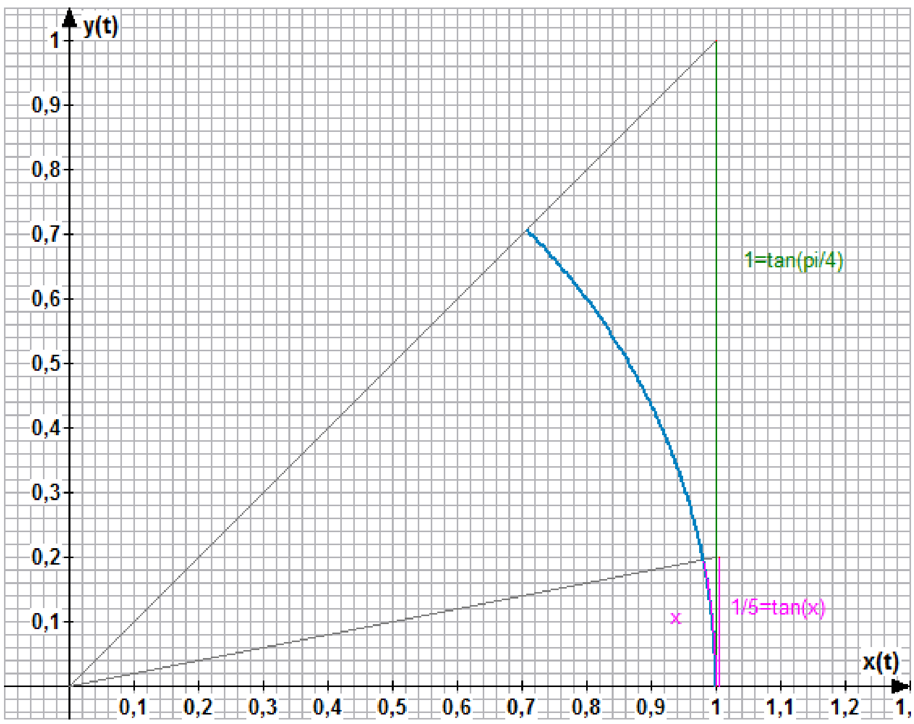
Bekannte Reihen zur Berechnung von π sind :

π/4 = arctan(1/2) + arctan(1/3)	$Euler_1$ gi=5,42
π/4 = 5·arctan(1/7) + 2·arctan(3/79)	$Euler_2$ gi=1,89
π/4 = 4·arctan(1/5) – arctan(1/239)	Machin 1706 gi=1,85
π/4 = 12·arctan(1/18) + 8·arctan(1/57) – 5·arctan(1/239)	Gauß gi=1,79
π/4 = 44·arctan(1/57) + 7·arctan(1/239) - 12·arctan(1/682) + 24·arctan(1/12943)	Störmer 1896 gi=1,59

Beispiel zur gi-Berechnung (Machin): gi = 1/lg(5) + 1/lg(239) = 1,851... .

Herleitung der Machin-Formel:

Ziel ist es, den Bogen (Winkel) π/4 durch Addition zweier kleinerer Bögen auszudrücken. Dadurch erhält man arctan-Argumente kleiner als 1, wodurch die Rechnung beschleunigt wird.
Ausgangspunkt ist ein Achtelkreis der Länge 1 (Winkel = 45° bzw Bogenmaß = π/4), in dessen Inneren ein weiterer Winkel (Bogen) x willkürlich so gewählt wird, dass tan(x) = 1/5 gilt. Dies ist äquivalent zu x = arctan(1/5) ≈ 0,197 .



Man erkennt, dass 4x (0,789...) nur wenig größer als π/4 (0,785...) ist.

Den anderen Winkel y wählen wir daher y = 4x-π/4 ≈ 0,00418; er ist also sehr klein, was gut für die Berechnung der Reihe ist.

Es gilt somit die Ausgangsgleichung

π / 4 = 4x – y

Dann ist $\tan(y) = \tan(4x - \frac{\pi}{4}) = \dfrac{\tan(4x) - \tan(\frac{\pi}{4})}{1 + \tan(4x)\cdot\tan(\frac{\pi}{4})}$.

Wir müssen noch tan(4x) berechnen, kennen aber nur tan(x) = 1/5.

Die Additionstheoreme liefern $\tan(4x)=\frac{4\tan(x)\cdot(1-\tan^2(x))}{1-\tan^2(x)\cdot(6-\tan^2(x))}=\frac{4\cdot 0{,}2\cdot(1-0{,}2^2)}{1-0{,}2^2\cdot(6-0{,}2^2)}=\frac{0{,}786}{0{,}7616}=\frac{120}{119}$.

Dieses wird eingesetzt: $\tan(y)=\frac{\tan(4x)-\tan(\frac{\pi}{4})}{1+\tan(4x)\cdot\tan(\frac{\pi}{4})}=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}\cdot 1}=\frac{\frac{1}{119}}{\frac{239}{119}}=\frac{1}{239}$

Insgesamt erhalten wir also mit π/4 = 4x – y das Ergebnis: **π / 4 = 4·arctan(1/5) - arctan(1/239)**
Dies entspricht der oben angegebenen Machin-Reihe .

Die Machin-Reihe eignet sich sehr gut, um in möglichst kurzer Zeit beliebig viele Stellen von π berechnen zu können. Machin selbst berechnete im Jahr 1706 bereits 100 Nachkommastellen von π .

Der Rekord liegt bei 2,7 Billionen Nachkommastellen (Fabrice Bellard, Jahr 2010).