

Matrizen sind Tabellen mit ze Zeilen und sp Spalten. Man kann mit ihnen Operationen durchführen, die in verschiedenen Bereichen benötigt werden (z.B. Lösen von Linearen Gleichungssystemen).

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,sp} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,sp} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ze,1} & a_{ze,2} & \dots & a_{ze,sp} \end{pmatrix}; a_{ik} \in \mathbb{R} \text{ ist eine } (ze,sp)\text{-Matrix. Schreibweise: } A = (a_{ik}).$$

Die Addition A+B :

Bei der Addition addiert man jedes a_{ik} zu dem entsprechenden b_{ik} .

Die Multiplikation A·B :

A ist eine (m, n) - Matrix, d.h. sie hat m Zeilen und n Spalten.

B ist eine (n, p) - Matrix, d.h. sie hat n Zeilen und p Spalten.

Die Produktmatrix $A \cdot B$ sei C. Es wird sich zeigen, daß C eine (m, p) - Matrix ist !

Multiplikationsregel :

1. Lege die i -te Zeile von A auf die k -te Spalte von B.
2. Multipliziere aufeinanderliegende Elemente miteinander.
3. Die Summe dieser Produkte („Skalarprodukte“) ist dann das Element c_{ik} .
4. Wiederhole die Schritte 1 bis 3 für i von 1 bis m und für k von 1 bis p !

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 11 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 11 \cdot 4 & -4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 11 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -30 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Die skalare Multiplikation $r \cdot A$ (r reell) :

Bei der skalaren Multiplikation multipliziert man jedes a_{ik} mit r .

Die Einheitsmatrix E ist das neutrale Element der Multiplikationen; E muss quadratisch sein !

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Es gilt: } A \cdot E = E \cdot A = A$$

A muss nicht quadratisch sein, aber die Dimensionen von E und E^* müssen so gewählt werden, dass in beiden Fällen eine Multiplikation möglich ist.

Die Nullmatrix N ist das neutrale Element der Addition; N muss nicht quadratisch sein !

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Es gilt: } A + N = N + A = A$$

A muss nicht quadratisch sein, aber die gleiche Dimensionen wie N haben, damit in beiden Fällen eine Addition möglich ist.

Anmerkung: Bei Matrizen gibt es sog. „Nullteiler“, d.h. $A \cdot B = N$ mit $A \neq N$ und $B \neq N$. Ein einfaches Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme (LGSe):

Beispiel: Zu lösen ist das LGS
$$\begin{cases} 1x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 2 \\ 4x_1 - 19x_2 + 27x_3 = 0 \\ -2x_1 + 13x_2 - 16x_3 = -1 \end{cases}.$$

Hierfür kann man mittels Matrizen folgendes schreiben:
$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 4 & -19 & 27 \\ -2 & 13 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Kurzschreibweise: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ oder noch kürzer $A | \vec{b}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 4 & -19 & 27 \\ -2 & 13 & -16 \end{pmatrix} \text{ nennt man Koeffizientenmatrix und}$$

$$A | \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 & | & 2 \\ 4 & -19 & 27 & | & 0 \\ -2 & 13 & -16 & | & -1 \end{pmatrix} \text{ erweiterte Koeffizientenmatrix .}$$

Man löst ein solches LGS mit dem Gaußschen Algorithmus:

Ziel ist dabei zunächst die Erzeugung einer sog. **Zeilen-Stufenform** („row echelon form“).

1.Schritt: Subtrahiere das 4-fache der 1. Zeile von der 2. Zeile.
Subtrahiere das (-2)-fache der 1. Zeile von der 3. Zeile.

Ergebnis:
$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -8 \\ 0 & 3 & -2 & | & 3 \end{pmatrix}.$$
 In der ersten Spalte stehen in 2 Zeilen Nullen.

Jetzt muss in der letzten Zeile aus $a_{31}=3$ eine 0 gemacht werden.

Dazu subtrahiert man das 3-fache der 2. Zeile von der 3. Zeile .

Ergebnis:
$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -8 \\ 0 & 0 & 1 & | & 27 \end{pmatrix}.$$
 Dies ist die gewünschte Zeilen-Stufenform.

Aus der 3. Zeile liest man sofort die Lösung $x_3 = 27$ ab.

Durch „Rückwärtseinsetzen“ von unten nach oben ermittelt man die restlichen beiden Lösungen.

Addition der 3. Zeile zur 2. Zeile liefert
$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 19 \\ 0 & 0 & 1 & | & 27 \end{pmatrix}.$$
 Also ist $x_2 = 19$.

In der 1. Zeile müssen noch die beiden Elemente -5 und 7 zu 0 gemacht werden.

Dies erreicht man durch 2 Schritte:

Subtraktion des (-5)-fachen der 2. Zeile von der 1. Zeile:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & | & 97 \\ 0 & 1 & 0 & | & 19 \\ 0 & 0 & 1 & | & 27 \end{pmatrix}$$

Subtraktion des 7-fachen der 3. Zeile von der 1. Zeile: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -92 \\ 0 & 1 & 0 & | & 19 \\ 0 & 0 & 1 & | & 27 \end{pmatrix}$. Also ist $x_1 = -92$.

Spaltenpivotisierung:

Das Verfahren der Zeilenstufenformierung muss erweitert werden, denn das Diagonalelement, durch das dividiert wird, hat nicht immer einen von 0 verschiedenen Wert. Z.B. kann gelten: $a_{11} = 0$.

Man sucht dann in der zugehörigen Spalte (hier: Spalte 1) ein Element ungleich 0. Findet man dies in der i-ten Zeile, so vertauscht man die beiden Zeilen (hier: 1 und i). Dabei sucht man aus Gründen der numerischen Stabilität das betragsgrößte Element der betreffenden Spalte heraus (sog. „Pivot“).

Pivot: franz.: Drehpunkt; Angelpunkt; das Element, welches als erstes gewählt wird

Beispiel: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 8 \\ 1 & 0 & 5 & | & 16 \\ 2 & 4 & 0 & | & 10 \end{pmatrix}$ In Spalte 1 ist 2 das betragsgrößte Element; also Tausch der Zeilen 1 und 3.

$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & | & 10 \\ 1 & 0 & 5 & | & 16 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \end{pmatrix}$. Anschließend werden in der 1. Spalte unterhalb der 2 Nullen erzeugt.

$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & | & 10 \\ 0 & -2 & 5 & | & 11 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \end{pmatrix}$ Schließlich muss noch die 1 in Zeile 3 zu Null gemacht werden.

Man erhält durch entsprechende Umformungen die Stufenform :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & | & 10 \\ 0 & -2 & 5 & | & 11 \\ 0 & 0 & 4,5 & | & 13,5 \end{pmatrix}$$

Weitere Vorgehensweise zur Lösung des LGS:

Man dividiert die letzte Zeile durch 4,5 (die Lösung $x_3 = 3$ kann man hier schon erkennen) . Nun subtrahiert man das 5-fache dieser Zeile von Zeile 2.

Zwischenergebnis: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & | & 10 \\ 0 & -2 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$

Zum Schluss subtrahiert man das (-2)-fache der 2. Zeile von Zeile 1.

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & -2 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$. Durch entsprechende Divisionen erhält man: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$

Die Lösungen sind also $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Algorithmus für eine Koeffizientenmatrix aik mit ze Zeilen und sp Spalten:

(1) Erzeugung der Zeilenstufenform:

```
für spalte von 1 bis ze tue
  falls aik[spalte,spalte] = 0
    suche betragsgrößtes Element a[zmax,spalte] in der Spalte
    falls a[zmax,spalte] = 0
      dann Abbruch (Matrix singulär)
    vertausche Zeilen mit den Nummern zeile und zmax

  für zeile von spalte+1 bis ze tue
    faktor = aik[zeile,spalte] / aik[spalte,spalte]
    für j von spalte+1 bis sp tue
      aik[zeile,j] = aik[zeile,j] - aik[spalte,j] * faktor
    aik[zeile,spalte] = 0
```

(2) Rückwärtssubstitution:

```
// erst alle Diagonalelemente auf 1 bringen
für zeile von 1 bis ze tue
  für spalte von sp ab bis zeile tue
    aik[zeile,spalte] = aik[zeile,spalte] / aik[zeile/zeile]

// dann rücksostituieren
für spalte von ze ab bis 2 tue
  für zeile von 1 bis spalte-1 tue
    für j von sp ab bis spalte tue
      faktor = aik[zeile,spalte] / aik[spalte,spalte]
      aik[zeile,j] = aik[zeile,j] - aik[spalte,j] * faktor
```

Weitere Beispiele für Lineare Gleichungssysteme (mit Lösungen) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & | & 21 \\ 4 & 3 & 5 & | & 25 \\ 10 & 5 & 1 & | & 23 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Die Lösungen sind } x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 6 \\ 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 1 & 2 & 1 & | & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Widerspruch } 0=1 \text{ in der letzten Zeile ! Die Lösungsmenge ist leer.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 6 \\ -3 & 3 & -6 & | & -18 \\ 1 & 0 & 3 & | & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 8 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \text{In der letzten Zeile stehen ausschließlich Nullen.}$$

Es entsteht die Identität $0 = 0$. Dies bedeutet, dass 2 Zeilen des Systems linear abhängig sind.
Das LGS besitzt daher unendlich viele Lösungen !

Unterbestimmte Systeme (weniger Gleichungen als Unbekannte):

Im Allgemeinen existiert keine eindeutige Lösung, sondern es gibt Abhängigkeiten zwischen den Variablen.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2550 \\ 3750 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & | & 2550 \\ 1 & 3 & 5 & | & 3750 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 11 & 0 & 1 & | & 3900 \\ 0 & 11 & 18 & | & 12450 \end{pmatrix}$$

Hier ist $11x_1 = 3900 - x_3$ und $11x_2 = 12450 - 18x_3$

Überbestimmte Systeme (mehr Gleichungen als Unbekannte):

Im Allgemeinen existiert keine eindeutige Lösung, sondern es entsteht ein Widerspruch, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\text{Beispiel: } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 17 \\ 35 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 17 \\ 35 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|c} \cdot x_1 & \cdot x_2 & \cdot 1 & \\ 3 & 2 & 24 & \\ 1 & 2 & 17 & \\ 0 & 4 & 35 & \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{array}{ccc|c} \cdot x_1 & \cdot x_2 & \cdot 1 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

In der letzten Zeile ergibt sich der Widerspruch ($0 = 1$) . Also gibt es keine Lösung !

Ein besonders interessantes überbestimmtes System für 2 Größen x_1, x_2 ist das folgende :

$$\begin{pmatrix} 48 & 60 & | & 2220 \\ 16 & 21 & | & 765 \\ 29 & 38 & | & 1385 \\ 23 & 30 & | & 1095 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 48 & 60 & | & 2220 \\ 0 & 1 & | & 25 \\ 0 & 1,75 & | & 43,75 \\ 0 & 1,25 & | & 31,25 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 48 & 60 & | & 2220 \\ 0 & 1,75 & | & 43,75 \\ 0 & 1 & | & 25 \\ 0 & 1,25 & | & 31,25 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 48 & 60 & | & 2220 \\ 0 & 1,75 & | & 43,75 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Obwohl sogar 3 Zeilen linear abhängig sind, gibt es hier eine eindeutige Lösung.
Die 2. Zeile liefert $x_2 = 25$ und aus der 1. Zeile ermittelt man durch Einsetzen $x_1 = 15$.

Warum wählt man das betragsgrößte Element einer Spalte als Pivot ?

Wenn das Pivotelement sehr klein wäre, könnten große numerische Fehler entstehen, wie das folgende Beispiel zeigt. Zunächst wird die exakte Lösung ermittelt:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/\varepsilon & | & 1/\varepsilon \\ 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1-1/\varepsilon & | & 2-1/\varepsilon \\ 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1-1/\varepsilon & | & 2-1/\varepsilon \\ 1-1/\varepsilon & 1-1/\varepsilon & | & 2-2/\varepsilon \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1-1/\varepsilon & | & 2-1/\varepsilon \\ 1-1/\varepsilon & 0 & | & -1/\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & (2-1/\varepsilon)/(1-1/\varepsilon) \\ 1 & 0 & | & -1/\varepsilon/(1-1/\varepsilon) \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & | & (1-2\varepsilon)/(1-\varepsilon) \\ 1 & 0 & | & 1/(1-\varepsilon) \end{pmatrix}}$$

Für $\begin{pmatrix} 10^{-16} & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$ müsste man bei Verwendung von 15 Stellen folgende Ergebnisse erhalten:

$$x_1 = 1/(1-10^{-16}) \approx 1,0000000000000001 \quad x_2 = (1-2 \cdot 10^{-16}) / (1-10^{-16}) \approx 0,9999999999999999$$

Mit Spaltenpivotisierung liefert Java7 die Ergebnisse: 1.0000000000000009 und 0.9999999999999999.

Ohne Spaltenpivotisierung: 2.0 (!) und 0.9999999999999998

Die Determinante det(A):

Die Determinante $\det(A) = |A|$ ist eine reelle Zahl, mit der man feststellen kann, ob das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt. A muss quadratisch sein!

Für eine (2,2)-Matrix gilt folgende Formel: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Für (n,n)-Matrizen mit $n > 2$ kann man die Determinante durch Entwicklung nach der k-ten Zeile berechnen:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot \det(A_{ik}) \quad \text{Laplacescher Entwicklungssatz}$$

Eine (3,3)-Matrix lässt sich somit auf (2,2)-Matrizen zurückführen (z.B. Entwicklung nach der 1. Zeile):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Beispiel: $\begin{vmatrix} \boxed{-4} & \boxed{3} & \boxed{5} \\ 2 & -4 & -3 \\ 5 & -2 & -7 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$

$$\begin{aligned} & -4 \cdot (-4 \cdot (-7) - (-3) \cdot (-2)) - 3 \cdot (2 \cdot (-7) - (-3) \cdot 5) + 5 \cdot (2 \cdot (-2) - (-4) \cdot 5) = \\ & -4 \cdot (28 - 6) - 3 \cdot (-14 + 15) + 5 \cdot (-4 + 20) = -4 \cdot 22 - 3 + 5 \cdot 16 = -88 - 3 + 80 = -11 \end{aligned}$$

Auf diese Weise kann man (n,n)-Matrizen auf (n-1,n-1)-Matrizen zurückführen und somit bis auf (2,2)-Matrizen „herunterrechnen“. Jedoch ist der Rechenaufwand für große n sehr hoch.

Besser geeignet ist die Methode der Verdichtung, die an einem (3,3)-Beispiel verdeutlicht werden soll.

Folgende Regeln werden angewendet:

- Multiplikation einer Zeile mit r bedeutet eine Multiplikation von $\det(A)$ mit r.
- Vertauschen zweier Zeilen bedeutet eine Multiplikation von $\det(A)$ mit -1.
- Differenz oder Summe von Zeilen hat keine Auswirkungen auf $\det(A)$.

Beispiel: $\begin{vmatrix} \boxed{-4} & 3 & 5 \\ 2 & -4 & -3 \\ 5 & -2 & -7 \end{vmatrix} \cdot (-4) = \frac{1}{(-4)^2} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 & 5 \\ -8 & 16 & 12 \\ -20 & 8 & 28 \end{vmatrix} = \frac{1}{(-4)^2} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & -7 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{(-4)^2} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} =$

$$-0,25 \cdot (10 \cdot 3 - 2 \cdot (-7)) = -0,25 \cdot 44 = -11$$

Das Verfahren funktioniert wie der Gaußsche Algorithmus, und auch hier muss mit Pivots gearbeitet werden. Man sieht, dass in Spalte 1 alle Elemente außer des ersten auf 0 gebracht werden. Nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz (s.o.) sind dann 2 der 3 Unterdeterminanten 0, so dass man zur Lösung nur die restliche Unterdeterminante benötigt.

Die Inverse Matrix A^{-1} bzw. (besser!) A^I :

Für die Inverse A^I einer Matrix A gilt der Ansatz: $A \cdot A^I = A^I \cdot A = E$ ($E =$ Einheitsmatrix; s.u.). Nur für quadratische Matrizen A kann eine Inverse existieren, andernfalls wären die o.a. Multiplikationen unmöglich !

Ist die Determinante von $A = 0$, so ist A nicht invertierbar.

Invertierbare Matrizen heißen regulär, nichtinvertierbare singulär .

Beispielrechnung für eine (3,3)-Matrix: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Gesucht ist $A^I = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

Ansatz: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Die reduzierte Koeffizientenmatrix ist dann: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Wendet man den Gauß-Algorithmus an, so erhält man $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Es gilt daher $A^I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (die gesuchte Inverse von A)

Man kann überprüfen, dass $A \cdot A^I = A^I \cdot A = E$ gilt .

Linksinverse und rechtsinverse Matrizen - Rang einer Matrix

Def.: Gegeben sei eine m, n - Matrix A .
 Eine n, m - Matrix X heißt **Linksinverse** von A , wenn gilt: $XA = E_n$.
 Eine n, m - Matrix X heißt **Rechtsinverse** von A , wenn gilt: $AX = E_m$.

Beispiel 3.2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Ansatz für die Rechtsinverse von A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ 4a+3d & 4b+3e & 4c+3f \\ 3a+4d & 3b+4e & 3c+4f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dieses LGS ist unlösbar (9 Gleichungen mit 6 Unbekannten) . Es gibt **keine** Rechtsinverse !

Ansatz für die Linksinverse von A :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+4b+3c & a+3b+4c \\ d+4e+3f & d+3e+4f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$\begin{array}{cccccc c} \cdot a & \cdot b & \cdot c & \cdot d & \cdot e & \cdot f & \cdot 1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}$	Nach Anwenden von rref folgt: $\begin{array}{cccccc c} \cdot a & \cdot b & \cdot c & \cdot d & \cdot e & \cdot f & \cdot 1 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}$	Daher gibt es 4 Bedingungen: $\begin{array}{l} a + 7c = -3 \\ b - c = 1 \\ d + 7f = 4 \\ e - f = -1 \end{array}$
---	--	---

Es gibt demnach beliebig viele Möglichkeiten für die Linksinverse:

Z.B.: $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ oder $X = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ usw. .

Satz: Eine m, n - Matrix A hat
 - mindestens eine Linksinverse, wenn gilt: $\text{rang}(A) = n$
 - mindestens eine Rechtsinverse, wenn gilt: $\text{rang}(A) = m$

Anm.: Der **Rang einer Matrix A** ist die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen- bzw. Spaltenvektoren von A .

Z.B. ist der Rang von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ gleich 2, weil $\text{rref}(A)$ liefert: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Weiteres Beispiel (4, 3):
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Eine Rechtsinverse existiert hier nicht, wohl aber eine Linksinverse.

Ansatz für die Linksinverse von A:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a+b+2d & 2a+b+c-d & 3a+2c-d \\ e+f+2h & 2e+f+g-h & 3e+2g-h \\ i+j+2m & 2i+j+k-m & 3i+2k-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

9 Gleichungen mit 12 Unbekannten:

LGS:												rref:															
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m		1	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m		1
1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0		1	1	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0		2
2	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	1	0	-3	0	0	0	0	0	0	0	0		-1
3	0	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	1	-8	0	0	0	0	0	0	0	0		-3
0	0	0	0	1	1	0	2	0	0	0	0		0	0	0	0	0	1	0	0	5	0	0	0	0		-2
0	0	0	0	2	1	1	-1	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0	1	0	-3	0	0	0	0		2
0	0	0	0	3	0	2	-1	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	1	-8	0	0	0	0		3
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	5		1
0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	1	-1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-3		-1
0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	2	-1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-8		-1

9 Bedingungen für beliebig viele Lösungen:

$$\begin{array}{llllll} a + 5d = 2 & b - 3d = -1 & c - 8d = -3 & e + 5h = -2 & f - 3h = 2 & g - 8h = 3 \\ i + 5m = 1 & j - 3m = -1 & k - 8m = -1 & & & \end{array}$$

Mögliche Linksinverse von A:
$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ -7 & 5 & 11 & 1 \\ -4 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Probe:
$$X \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ -7 & 5 & 11 & 1 \\ -4 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ q.e.d.}$$

Übrigens gilt hier: $\text{rang}(A) = 3$!!

Die LR (LU) - Zerlegung :

Jede reguläre Matrix A kann in eine linke (untere) Dreiecksmatrix L (mit Einsen auf der Hauptdiagonale; s.u.) und eine rechte (obere) Dreiecksmatrix R zerlegt werden. Es gilt dann: $A = L \cdot R$.

Anmerkung: Die englische Bezeichnung ist LU , wobei L = Lower und U = Upper bedeuten .

Beispielrechnung für eine (3,3)-Matrix: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Gesucht $L \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \\ g & h & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$

Man geht vor wie beim Gauß-Algorithmus zur Bestimmung der Zeilenstufenform. Allerdings werden hier in der linken Dreiecksmatrix keine Nullen erzeugt, sondern es werden die Faktoren gespeichert, die man benötigt, um (beim Gauß-Algorithmus) die 0 an der betreffenden Stelle zu erzeugen.

Konkret: Im ersten Schritt betrachtet man die Zahl 2 in Spalte1;Zeile1 . Um in der 2.Zeile die 3 zur 0 zu machen, benötigt man den Faktor 1,5. Subtrahiert man nämlich das 1,5-fache der 1.Zeile von der 2.Zeile, dann würde aus der 3 eine 0. Also speichert man anstelle der 3 eine 1,5. Der Rest der Zeile wird wie beim Gauß-Algorithmus verändert. Entsprechend muss man in der Spalte1;Zeile3 aus der 1 eine 0,5 machen, denn es muss das 0,5-fache der 1.Zeile von der 2.Zeile subtrahiert werden.

Zwischenergebnis: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1,5 \end{pmatrix}$

Genauso wie beim Gauß-Algorithmus betrachtet man anschließend nur noch den (2,2)-Matrixanteil rechts unten. Ziel wäre, die 0,5 in Spalte2;Zeile3 zu 0 zu machen. Dies gelingt mit dem Faktor 1, den wir anstelle der 0,5 speichern. Die letzte verbleibende Zahl 1,5 wird ersetzt durch $1,5 - 1 \cdot 0,5 = 1$.

Das Endergebnis der Umformungen ist: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

In dieser Matrix steckt sowohl L als auch R. Bei L muss berücksichtigt werden, dass alle Diagonalelemente 1 sein sollen (obwohl dies hier nicht zu sehen ist). Damit erhält man als

Lösung: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Man sieht, dass R die gleiche Matrix ist, die bei der normalen Zeilenstufenform entsteht ! L wird zusätzlich erzeugt durch Speichern der o.a. Faktoren anstelle der Nullen.

Ein positiver Nebeneffekt ist, dass man mit der LR-Zerlegung in einfacher Weise auch die Determinante der Matrix A berechnen kann:

Es gilt: **det(A) ist das Produkt der Diagonalelemente von R**

Für das obige Beispiel ist dann $\det(A) = 2 \cdot 0,5 \cdot 1 = 1$.

Der Vorteil der LR-Zerlegung ist, dass man simultan LGSe lösen kann :

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow (L \cdot R) \cdot \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow L \cdot (R \cdot \vec{x}) = \vec{b} \Rightarrow L \cdot \vec{y} = \vec{b} \text{ mit } \vec{y} = R \cdot \vec{x} .$$

Man löst daher zuerst $L \cdot \vec{y} = \vec{b}$ und anschließend $R \cdot \vec{x} = \vec{y}$ (beides sind einfache Berechnungen) .

Sei $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ gesetzt. Dann verläuft die Rechnung für $L \cdot \vec{y} = \vec{b}$ folgendermaßen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1,5 & 1 & 0 & 2 \\ 0,5 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dann noch die Lösung für $R \cdot \vec{x} = \vec{y}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Weitere Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 48 & 60 & 2220 \\ 16 & 21 & 765 \\ 29 & 38 & 1385 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 29/48 & 7/4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 48 & 60 & 2220 \\ 0 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 48 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$A \qquad \qquad L \qquad \qquad R$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 10 & 17 \\ 8 & 14 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 2 \cdot 1 \cdot 4 = 8.$$

$A \qquad \qquad L \qquad \qquad R$

Achtung: Falls eine Pivotisierung notwendig sein sollte, so müssten die Zeilenvertauschungen berücksichtigt werden. Dies kann durch Multiplikation mit Permutationsmatrizen P geschehen. Es gilt: $P \cdot A = L \cdot R$
Dies lässt sich umformen in $A = P^{-1} \cdot L \cdot R = (P^{-1} \cdot L) \cdot R$

Für $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ folgt dann: $(P^{-1} \cdot L) \cdot R \cdot \vec{x} = \vec{b}$ bzw. $(P^{-1} \cdot L) \cdot \vec{y} = \vec{b}$ mit $R \cdot \vec{x} = \vec{y}$.

Im Gegensatz zu der obigen Rechnung verwendet man bei Zeilenvertauschungen also $P^{-1} \cdot L$ statt L !

Dies wir später auch an einem Beispiel durchgerechnet.

Permutationsmatrizen P

Bei Permutationsmatrizen (Vertauschungsmatrizen) steht in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine 1, ansonsten Nullen.

- (1) Multipliziert man eine Matrix A von links mit P, also PA, so tauscht man damit Zeilen.
 $p_{ik} = 1$ bedeutet dabei, dass aus der k-ten Zeile die i-te Zeile wird. $ze\ k \rightarrow ze\ i$

Beispiele:

$$P = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad PA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{keine Veränderung durch } P = E!$$

Vertauscht man aber bei P die Zeilen 1 und 2, erzeugt man also $p_{12} = 1$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad PA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Vertauschung der Zeilen 1 und 2 bei A!}$$

- (2) Multipliziert man eine Matrix A von rechts mit P, also AP, so tauscht man damit Spalten.
 $p_{ik} = 1$ bedeutet dabei, dass aus der i-ten Spalte die k-te Spalte wird. $sp\ k \rightarrow sp\ i$

Beispiel: Bei Verwendung der obigen Matrix P mit $p_{12} = 1$ entsteht folgendes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot$$

$A \qquad P$

Bei der LR-Zerlegung kann es zur Vertauschung zweier Zeilen von A kommen. Das nach der Vertauschung entstandene A berechnet man durch die Multiplikation $P \cdot A$. Für die LR-Zerlegung (mit Pivotisierung) des

oben angegebenen Beispiels $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ bedeutet das zunächst eine Vertauschung der Zeilen 1 und 2.

Die entsprechende Permutationsmatrix ist $P = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ansatz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 4/3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$L \setminus R$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

L R

Bei der Pivotisierung können unter Umständen mehrere Zeilenvertauschungen anfallen, so dass entsprechend viele Permutationsmatrizen P_1, P_2, \dots, P_n entstehen.

Die Gesamtpermutationsmatrix P ergibt sich dann zu $P = P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_n$.

Ein Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{24} & 0 & -12 & -12 \\ 6 & 6 & 18 & 0 \\ 6 & 18 & 66 & 18 \\ -12 & 0 & 18 & 84 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 1/4 & \boxed{6} & 21 & 3 \\ 1/4 & 18 & 69 & 21 \\ -1/2 & 0 & 12 & 78 \end{pmatrix} \quad P_1 = E \quad \text{Kein Tausch (P}_1 \text{ überflüssig !)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 1/4 & \boxed{18} & 69 & 21 \\ 1/4 & 6 & 21 & 3 \\ -1/2 & 0 & 12 & 78 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 1/4 & 18 & 69 & 21 \\ 1/4 & 1/3 & \boxed{-2} & -4 \\ -1/2 & 0 & 12 & 78 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Tausch Zeilen 2 ; 3}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 1/4 & 18 & 69 & 21 \\ -1/2 & 0 & \boxed{12} & 78 \\ 1/4 & 1/3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 1/4 & 18 & 69 & 21 \\ -1/2 & 0 & \boxed{12} & 78 \\ 1/4 & 1/3 & -1/6 & 9 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Tausch Zeilen 3 ; 4}$$

Die Zerlegungsmatrizen sind $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & -1/6 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 18 & 69 & 21 \\ 0 & 0 & 12 & 78 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Die Determinante berechnet sich zu $\det(A) = 24 \cdot 18 \cdot 12 \cdot 9 = 46656$

Anmerkung: Bei einer ungeraden Anzahl von Zeilenvertauschungen kehrt sich das Vorzeichen um !

Multipliziert man L mit R , so erhält man $L \cdot R = \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 6 & 18 & 66 & 18 \\ -12 & 0 & 18 & 84 \\ 6 & 6 & 18 & 0 \end{pmatrix}$

Um zur ursprünglichen Matrix A zurückzukehren, müsste man erst die Zeilen 3;4 tauschen und dann 2;3. Die oben durchgeführten Vertauschungen werden also rückgängig gemacht.

Ebenso kann man aber $(P_2 \cdot P_3) \cdot (L \cdot R)$ berechnen, denn: $P = P_3 P_2 \Rightarrow P_1 = P_2 P_3$. Dies ergibt :

$$(P_2 \cdot P_3) \cdot (L \cdot R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 6 & 18 & 66 & 18 \\ -12 & 0 & 18 & 84 \\ 6 & 6 & 18 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 6 & 18 & 66 & 18 \\ -12 & 0 & 18 & 84 \\ 6 & 6 & 18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 6 & 6 & 18 & 0 \\ 6 & 18 & 66 & 18 \\ -12 & 0 & 18 & 84 \end{pmatrix} = A$$

Will man nun mit dieser LR-Zerlegung das Problem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ lösen, so berechnet man erst (wie bereits weiter oben bewiesen) \vec{y} mittels $(P^{-1} \cdot L) \cdot \vec{y} = \vec{b} \Rightarrow (P_2 \cdot P_3 \cdot L) \cdot \vec{y} = \vec{b}$ und dann $R \cdot \vec{x} = \vec{y}$.

Beispiel: $\vec{b} = \begin{pmatrix} 36 \\ 18 \\ 24 \\ -96 \end{pmatrix}$. Mit $P^{-1} \cdot L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & -1/6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & -1/6 & 1 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

folgt wegen $(P^{-1} \cdot L) \cdot \vec{y} = \vec{b}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 1/4 & 1/3 & -1/6 & 1 & 18 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 & 24 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 & -96 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -78 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \end{array} \right), \text{ also } \vec{y} = \begin{pmatrix} 36 \\ 15 \\ -78 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Aus $R \cdot \vec{x} = \vec{y}$ folgt: $\left(\begin{array}{cccc|c} 24 & 0 & -12 & -12 & 36 \\ 0 & 18 & 69 & 21 & 15 \\ 0 & 0 & 12 & 78 & -78 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$.

Die Lösung des LGS $\begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 6 & 6 & 18 & 0 \\ 6 & 18 & 66 & 18 \\ -12 & 0 & 18 & 84 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 36 \\ 18 \\ 24 \\ -96 \end{pmatrix}$ ist demnach $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Weiteres Beispiel (Lösung mit LR-Zerlegung; mit Zeilentausch):

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}. \text{ Die Rechnung liefert } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus $(P^{-1} \cdot L) \cdot \vec{y} = \vec{b}$ folgt: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & -29/4 \end{array} \right), \text{ also } \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ -29/4 \end{pmatrix}.$$

Aus $R \cdot \vec{x} = \vec{y}$ folgt:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -29/4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/40 \\ 0 & 1 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 1 & 29/8 \end{array} \right).$$
 Lösung:
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1/40 \\ 1/10 \\ 29/8 \end{pmatrix}$$