

Matrizen sind Tabellen mit  $ze$  Zeilen und  $sp$  Spalten .

Man kann mit ihnen Operationen durchführen, die in verschiedenen Bereichen benötigt werden (z.B. Lösen von Linearen Gleichungssystemen).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1;sp} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2;sp} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ze;1} & a_{ze;2} & \dots & a_{ze;sp} \end{pmatrix} \text{ mit } a_{ik} \in \mathbb{R} \text{ ist eine } (ze;sp)\text{-Matrix.} \quad \text{Schreibweise: } A = (a_{ik})$$

**Die Addition A+B :**

Bei der Addition addiert man jedes  $a_{ik}$  zu dem entsprechenden  $b_{ik}$  .

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 11 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+2 & 3+0 & 11-3 \\ 1+5 & 0-1 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

**Die Multiplikation A·B :**

A ist eine  $(m, n)$  - Matrix, d.h. sie hat  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten .

B ist eine  $(n, p)$  - Matrix, d.h. sie hat  $n$  Zeilen und  $p$  Spalten .

Die Produktmatrix  $A \cdot B$  sei C . Es wird sich zeigen, daß C eine  $(m, p)$  - Matrix ist !

Multiplikationsregel :

1. Lege die  $i$ -te Zeile von A auf die  $k$ -te Spalte von B.
2. Multipliziere aufeinanderliegende Elemente miteinander.
3. Die Summe dieser Produkte („Skalarprodukte“) ist dann das Element  $c_{ik}$  .
4. Wiederhole die Schritte 1 bis 3 für  $i$  von 1 bis  $m$  und für  $k$  von 1 bis  $p$  !

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 11 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 11 \cdot 4 & -4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 11 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -30 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

**Die skalare Multiplikation  $r \cdot A$  ( $r$  reell) :**

Bei der skalaren Multiplikation mutipliziert man jedes  $a_{ik}$  mit  $r$  .

Beispiel:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & 11 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-4) & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 11 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 9 & 33 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Die Einheitsmatrix E** ist das **neutrale Element der Multiplikation** ; E muss quadratisch sein !

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:  $A \cdot E = E^* \cdot A = A$

A muss nicht quadratisch sein, aber die Dimensionen von E und E\* müssen so gewählt werden, dass in beiden Fällen eine Multiplikation möglich ist.

Beispiel:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$   $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   $E^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Die Nullmatrix N** ist das **neutrale Element der Addition** ; N muss nicht quadratisch sein !

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt:  $A + N = N + A = A$

A muss nicht quadratisch sein, aber die gleiche Dimension wie N haben, damit in beiden Fällen eine Addition möglich ist .

Anmerkung: Bei Matrizen gibt es sog. „**Nullteiler**“, d.h.  $A \cdot B = N$  mit  $A \neq N$  und  $B \neq N$  .

Ein einfaches Beispiel:  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Gäbe es Nullteiler bei reellen Zahlen a, b , so wäre  $a \cdot b = 0$  mit  $a \neq 0$  und  $b \neq 0$  möglich !!

**Die Transponierte A<sup>T</sup>** entsteht durch die Vertauschung von Zeilen und Spalten der Matrix A .

Beispiel:  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$  . Dann ist  $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  . Man spiegelt also an der Hauptdiagonale !

**Die Spur sp(A)** ist die Summe der Hauptdiagonalelemente der quadratischen Matrix A .

Beispiel:  $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  . Dann ist  $sp(A) = -5 + 3 + 1 = -1$

Der **Rang rg(A)** einer Matrix A ist die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen- bzw. Spaltenvektoren von A. Dies spielt z.B. eine Rolle bei der Existenz von Lösungen bei Linearen Gleichungssystemen.

Z.B. ist der Rang von  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  gleich **2** , denn für z.B. den untersten Zeilenvektor [3 ; 4] gilt:

$[3 ; 4] = 7 \cdot [1 ; 1] - [4 ; 3] = [7 ; 7] - [4 ; 3]$  ; daher ist er von den ersten beiden Zeilenvektoren linear abhängig !

Der Rang lässt sich bequem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren (s. unten) berechnen .

## Lineare Gleichungssysteme (LGSe):

Beispiel: Zu lösen ist das LGS 
$$\begin{cases} 1x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 2 \\ 4x_1 - 19x_2 + 27x_3 = 0 \\ -2x_1 + 13x_2 - 16x_3 = -1 \end{cases}.$$

Hierfür kann man mittels Matrizen folgendes schreiben: 
$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 4 & -19 & 27 \\ -2 & 13 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Kurzschreibweise:  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$  oder noch kürzer  $A | \vec{b}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 4 & -19 & 27 \\ -2 & 13 & -16 \end{pmatrix} \text{ nennt man } \underline{\text{Koeffizientenmatrix}} \text{ und}$$

$$A | \vec{b} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 7 & 2 \\ 4 & -19 & 27 & 0 \\ -2 & 13 & -16 & -1 \end{array} \right) \underline{\text{erweiterte Koeffizientenmatrix}}.$$

Man löst ein solches LGS mit dem Gauß-Algorithmus bzw. Gauß-Jordan-Algorithmus:

Ziel ist dabei zunächst die Erzeugung einer sog. **Zeilen-Stufenform** bzw. **row echelon form** („ref“).

1.Schritt: Subtrahiere das 4-fache der 1. Zeile von der 2. Zeile.  
Subtrahiere das (-2)-fache der 1. Zeile von der 3. Zeile.

Ergebnis: 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{array} \right)$$
. In der ersten Spalte stehen in 2 Zeilen Nullen.

Jetzt muss in der letzten Zeile aus  $a_{31} = 3$  eine 0 gemacht werden.  
Dazu subtrahiert man das 3-fache der 2. Zeile von der 3. Zeile.

Ergebnis: 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 27 \end{array} \right)$$
. Dies ist die gewünschte **Zeilen-Stufenform (ref)**; **Gauß-Alg.**

Aus der 3. Zeile liest man sofort die Lösung  $x_3 = 27$  ab.

Durch „Rückwärtseinsetzen“ von unten nach oben ermittelt man die restlichen beiden Lösungen.

Insgesamt erhält man so die **reduzierte Zeilen-Stufenform** bzw. **reduced row echelon form** („rref“)  
Der Algorithmus zum Erreichen der „rref“ heißt Gauß-Jordan-Algorithmus !

Addition der 3. Zeile zur 2. Zeile liefert 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 27 \end{array} \right)$$
. Also ist  $x_2 = 19$ .

In der 1. Zeile müssen noch die beiden Elemente -5 und 7 zu 0 gemacht werden.

Dies erreicht man durch 2 Schritte:

Subtraktion des (-5)-fachen der 2.Zeile von der 1.Zeile: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & | & 97 \\ 0 & 1 & 0 & | & 19 \\ 0 & 0 & 1 & | & 27 \end{pmatrix}$$

Subtraktion des 7-fachen der 3.Zeile von der 1.Zeile: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -92 \\ 0 & 1 & 0 & | & 19 \\ 0 & 0 & 1 & | & 27 \end{pmatrix}$$
 **reduzierte Zeilen-Stufenform (rref)**

Schließlich erhält man noch  $x_1 = -92$ .

### Spaltenpivotisierung:

Das Verfahren der Zeilenstufenformierung muss erweitert werden, denn das Diagonalelement, durch das dividiert wird, hat nicht immer einen von 0 verschiedenen Wert. Z.B. kann gelten:  $a_{11} = 0$ .

Man sucht dann in der zugehörigen Spalte (hier: Spalte 1) ein Element ungleich 0. Findet man dies in der i-ten Zeile, so vertauscht man die beiden Zeilen (hier: 1 und i). Dabei sucht man aus Gründen der numerischen Stabilität das betragsgrößte Element der betreffenden Spalte heraus (sog. „Pivot“).

**Pivot:** franz.: Drehpunkt; Angelpunkt; das Element, welches als erstes gewählt wird

Beispiel: 
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 8 \\ 1 & 0 & 5 & | & 16 \\ 2 & 4 & 0 & | & 10 \end{pmatrix}$$
 In Spalte 1 ist 2 das betragsgrößte Element; also Tausch der Zeilen 1 und 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & | & 10 \\ 1 & 0 & 5 & | & 16 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \end{pmatrix}$$
 . Anschließend werden in der 1. Spalte unterhalb der 2 Nullen erzeugt.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & | & 10 \\ 0 & -2 & 5 & | & 11 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \end{pmatrix}$$
 Schließlich muss noch die 1 in Zeile 3 zu Null gemacht werden.

Man erhält durch entsprechende Umformungen die Stufenform :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & | & 10 \\ 0 & -2 & 5 & | & 11 \\ 0 & 0 & 4,5 & | & 13,5 \end{pmatrix}}$$

Weitere Vorgehensweise zur Lösung des LGS:

Man dividiert die letzte Zeile durch 4,5 ( die Lösung  $x_3 = 3$  kann man hier schon erkennen) . Nun subtrahiert man das 5-fache dieser Zeile von Zeile 2.

Zwischenergebnis: 
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & | & 10 \\ 0 & -2 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Zum Schluss subtrahiert man das (-2)-fache der 2.Zeile von Zeile 1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & -2 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$
 . Durch entsprechende Divisionen erhält man: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Die Lösungen sind also  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = 2$ ;  $x_3 = 3$  .

# Gauß-Jordan-Algorithmus für eine Koeffizientenmatrix $(a_{ik})$ mit $ze$ Zeilen und $sp$ Spalten

## PSEUDOCODE:

### (1) Erzeugung der Zeilenstufenform:

```
für spalte von 1 bis ze tue
  falls aik[spalte,spalte] = 0
    suche betragsgrößtes Element a[zmax,spalte] in der Spalte //Maximumsuche
    falls a[zmax,spalte] = 0
      dann Abbruch (Matrix singular)
    vertausche Zeilen mit den Nummern zeile und zmax

  für zeile von spalte+1 bis ze tue
    faktor = aik[zeile,spalte] / aik[spalte,spalte]
    für j von spalte+1 bis sp tue
      aik[zeile,j] = aik[zeile,j] - aik[spalte,j] * faktor
    aik[zeile,spalte] = 0
```

### (2) Rückwärtssubstitution:

```
// erst alle Diagonalelemente auf 1 bringen
für zeile von 1 bis ze tue
  für spalte von sp ab bis zeile tue
    aik[zeile,spalte] = aik[zeile,spalte] / aik[zeile/zeile]

// dann rücksostituieren
für spalte von ze ab bis 2 tue
  für zeile von 1 bis spalte-1 tue
    für j von sp ab bis spalte tue
      aik[zeile,j] = aik[zeile,j] - aik[spalte,j] * aik[zeile,spalte]
```

## Warum wählt man das betragsgrößte Element einer Spalte als Pivot ?

Wenn das Pivotelement sehr klein wäre, könnten große numerische Fehler entstehen, wie das folgende Beispiel zeigt. Zunächst wird die exakte Lösung ermittelt:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/\varepsilon & | & 1/\varepsilon \\ 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1-1/\varepsilon & | & 2-1/\varepsilon \\ 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1-1/\varepsilon & | & 2-1/\varepsilon \\ 1-1/\varepsilon & 1-1/\varepsilon & | & 2-2/\varepsilon \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1-1/\varepsilon & | & 2-1/\varepsilon \\ 1-1/\varepsilon & 0 & | & -1/\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & (2-1/\varepsilon)/(1-1/\varepsilon) \\ 1 & 0 & | & -1/\varepsilon/(1-1/\varepsilon) \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1/(1-\varepsilon) \\ 0 & 1 & | & (1-2\varepsilon)/(1-\varepsilon) \end{pmatrix}}$$

Für  $\begin{pmatrix} 10^{-16} & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$  müsste man bei Verwendung von 15 Stellen folgende Ergebnisse erhalten:

$$x_1 = 1/(1-10^{-16}) = 10000000000000000 / 9999999999999999 = 1,000000000000000100...$$

$$x_2 = (1-2 \cdot 10^{-16}) / (1-10^{-16}) = 9999999999999998 / 9999999999999999 = 0,9999999999999998...$$

Mit Spaltenpivotisierung liefert Java7 die Ergebnisse: 1.0000000000000009 und 0.9999999999999999.

Ohne Spaltenpivotisierung: 2.0 (falsch!) und 0.9999999999999998

## Weitere Beispiele für Lineare Gleichungssysteme (mit Lösungen) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & | & 21 \\ 4 & 3 & 5 & | & 25 \\ 10 & 5 & 1 & | & 23 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Die Lösungen sind } x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3 .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 6 \\ 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 1 & 2 & 1 & | & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Widerspruch } 0=1 \text{ in der letzten Zeile ! Die Lösungsmenge ist leer.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 6 \\ -3 & 3 & -6 & | & -18 \\ 1 & 0 & 3 & | & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 8 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \text{In der letzten Zeile stehen ausschließlich Nullen.}$$

Es entsteht die Identität  $0 = 0$  . Dies bedeutet, dass 2 Zeilen des Systems linear abhängig sind. Das LGS besitzt daher unendlich viele Lösungen ( $x_1 + 3x_3 = 8$  und  $x_2 + x_3 = 2$ ) !

## Unterbestimmte Systeme (weniger Gleichungen als Unbekannte):

Im Allgemeinen existiert keine eindeutige Lösung, sondern es gibt Abhängigkeiten zwischen den Variablen.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2550 \\ 3750 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & | & 2550 \\ 1 & 3 & 5 & | & 3750 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 11 & 0 & 1 & | & 3900 \\ 0 & 11 & 18 & | & 12450 \end{pmatrix}$$

Hier gibt es unendlich viele Lösungen mit:  $11x_1 = 3900 - x_3$  und  $11x_2 = 12450 - 18x_3$

## Überbestimmte Systeme (mehr Gleichungen als Unbekannte):

Im Allgemeinen existiert keine eindeutige Lösung, sondern es entsteht ein Widerspruch, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\text{Beispiel: } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 17 \\ 35 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 17 \\ 35 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} \cdot x_1 & \cdot x_2 & \cdot 1 & & & \\ 3 & 2 & 24 & & & \\ 1 & 2 & 17 & & & \\ 0 & 4 & 35 & & & \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{array}{ccc|ccc} \cdot x_1 & \cdot x_2 & \cdot 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}$$

In der letzten Zeile ergibt sich der Widerspruch ( $0 = 1$ ) . Also gibt es keine Lösung !

Ein besonders interessantes überbestimmtes System für 2 Größen  $x_1, x_2$  ist das folgende :

$$\begin{pmatrix} 48 & 60 & | & 2220 \\ 16 & 21 & | & 765 \\ 29 & 38 & | & 1385 \\ 23 & 30 & | & 1095 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 48 & 60 & | & 2220 \\ 0 & 1 & | & 25 \\ 0 & 1,75 & | & 43,75 \\ 0 & 1,25 & | & 31,25 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 48 & 60 & | & 2220 \\ 0 & 1,75 & | & 43,75 \\ 0 & 1 & | & 25 \\ 0 & 1,25 & | & 31,25 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 48 & 60 & | & 2220 \\ 0 & 1,75 & | & 43,75 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Obwohl sogar 3 Zeilen linear abhängig sind, gibt es hier eine eindeutige Lösung. Die 2. Zeile liefert  $x_2 = 25$  und aus der 1. Zeile ermittelt man durch Einsetzen  $x_1 = 15$  .

## JAVA-Implementierung des Gaußschen Algorithmus: „ref“ bzw. „rref“ bzw. „LR-Zerlegung(siehe unten)“

```
public static double[][] ref(double[][] matUr, boolean LR, boolean pivot, boolean rueckSubst) {
    int zeM = matUr.length; // Zeilenzahl von matUr
    int spM = matUr[0].length; // Spaltenzahl der 0. Zeile von matUr
    if (LR && zeM != spM)
        throw new IllegalArgumentException("Matrix muss quadratisch sein !");

    // deep copy; matUr soll nicht verändert werden !
    double [][] mat = new double[zeM][spM];
    for (int ze = 0; ze < zeM; ze++)
        for (int sp = 0; sp < spM; sp++)
            mat[ze][sp] = matUr[ze][sp];

    double faktor, tmp, merke;

    for (int sp = 0; sp < zeM; sp++) {
        // suche betragsgrößtes Element(Pivot) in Spalte sp ab Zeile Nr. sp
        double max = Math.abs(mat[sp][sp]);
        int zeMax = sp;
        if (pivot || max == 0.0) {
            for (int ze = sp + 1; ze < zeM; ze++) {
                tmp = Math.abs(mat[ze][sp]);
                if (tmp > max) {
                    max = tmp;
                    zeMax = ze;
                }
            } // for ze
        }

        if (mat[zeMax][sp] == 0.0)
            if (zeM != spM)
                return mat;
            else
                throw new NumberFormatException("Matrix ist singulär !");

        if (sp != zeMax) { // tausche Zeilen sp und zeMax
            for (int j = 0; j < spM; j++) {
                merke = mat[zeMax][j];
                mat[zeMax][j] = mat[sp][j];
                mat[sp][j] = merke;
            }
        }

        // für alle Zeilen unterhalb des Pivotelements:
        for (int ze = sp + 1; ze < zeM; ze++) {
            // für alle verbleibenden Elemente in der Zeile
            faktor = mat[ze][sp] / mat[sp][sp];

            for (int j = sp + 1; j < spM; j++)
                mat[ze][j] = mat[ze][j] - mat[sp][j] * faktor;

            // setze das am linken Rand stehende Element = 0 (bzw. = faktor)
            if (LR)
                mat[ze][sp] = faktor;
            else
                mat[ze][sp] = 0.0;
        } // for ze
    } // for sp

    if (rueckSubst) { // Rücksubstitution
        // erst alle Diagonalelemente auf 1 bringen
        for (int ze = 0; ze < zeM; ze++)
            for (int sp = spM - 1; sp >= ze; sp--)
                mat[ze][sp] = mat[ze][sp] / mat[ze][ze];
        // dann rückwärtsrechnen
        for (int sp = zeM - 1; sp >= 1; sp--)
            for (int ze = 0; ze <= sp - 1; ze++)
                for (int vglSp = spM - 1; vglSp >= sp; vglSp--)
                    mat[ze][vglSp] = mat[ze][vglSp] - mat[sp][vglSp] * mat[ze][sp];
    }
    return mat;
} // Ende ref
```

## Die Determinante det(A):

Die Determinante  $\det(A) = |A|$  ist eine reelle Zahl, mit der man feststellen kann, ob das LGS  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$  eindeutig lösbar ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\det(A) \neq 0$  gilt. **A muss quadratisch sein!**

Für eine (2,2)-Matrix gilt folgende Formel: 
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Für (n,n)-Matrizen mit  $n > 2$  kann man die Determinante durch **Entwicklung** nach der k-ten Zeile berechnen:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot \det(A_{ik}) \quad \text{Laplacescher Entwicklungssatz}$$

Eine (3,3)-Matrix lässt sich somit auf (2,2)-Matrizen zurückführen (z.B. Entwicklung nach der 1. Zeile):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Beispiel: 
$$\begin{vmatrix} \boxed{-4} & \boxed{3} & \boxed{5} \\ 2 & -4 & -3 \\ 5 & -2 & -7 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$-4 \cdot (-4 \cdot (-7) - (-3) \cdot (-2)) - 3 \cdot (2 \cdot (-7) - (-3) \cdot 5) + 5 \cdot (2 \cdot (-2) - (-4) \cdot 5) =$$

$$-4 \cdot (28 - 6) - 3 \cdot (-14 + 15) + 5 \cdot (-4 + 20) = -4 \cdot 22 - 3 + 5 \cdot 16 = -88 - 3 + 80 = -11$$

Auf diese Weise kann man (n,n)-Matrizen auf (n-1,n-1)-Matrizen zurückführen und somit bis auf (2,2)-Matrizen „herunterrechnen“. Jedoch ist der Rechenaufwand für große n sehr hoch.

Besser geeignet ist die **Methode der Verdichtung**, die an einem (3,3)-Beispiel verdeutlicht werden soll.

Folgende Regeln werden angewendet:

- Multiplikation einer Zeile mit r bedeutet eine Multiplikation von  $\det(A)$  mit r.
- Vertauschen zweier Zeilen bedeutet eine Multiplikation von  $\det(A)$  mit -1.
- Differenz oder Summe von Zeilen hat keine Auswirkungen auf  $\det(A)$ .

Beispiel: 
$$\begin{vmatrix} \boxed{-4} & 3 & 5 \\ 2 & -4 & -3 \\ 5 & -2 & -7 \end{vmatrix} \cdot (-4) = \frac{1}{(-4)^2} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 & 5 \\ -8 & 16 & 12 \\ -20 & 8 & 28 \end{vmatrix} = \frac{1}{(-4)^2} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & -7 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{(-4)^2} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-0,25 \cdot (10 \cdot 3 - 2 \cdot (-7)) = -0,25 \cdot 44 = -11$$

Das Verfahren funktioniert wie der Gaußsche Algorithmus, und auch hier muss mit Pivots gearbeitet werden.

Man sieht, dass in Spalte 1 alle Elemente außer des ersten auf 0 gebracht werden. Nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz (s.o.) sind dann 2 der 3 Unterdeterminanten 0, so dass man zur Lösung nur die restliche Unterdeterminante benötigt.



## Die Inverse Matrix $A^{-1}$ bzw. (besser!) $A^I$ :

Für die **Inverse**  $A^I$  einer Matrix  $A$  gilt der Ansatz:  $A \cdot A^I = A^I \cdot A = E$  ( $E$  = Einheitsmatrix; s.u. ). Nur für quadratische Matrizen  $A$  kann eine Inverse existieren, andernfalls wären die o.a. Multiplikationen unmöglich !

Ist die Determinante von  $A = 0$  , so ist  $A$  nicht invertierbar.

Invertierbare Matrizen heißen **regulär**, nichtinvertierbare **singulär** .

Beispiel 1:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Gesucht ist  $A^I = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

Ansatz:  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  .

Die reduzierte Koeffizientenmatrix ist dann:  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Wendet man den Gauß-Algorithmus an, so erhält man  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  .

Es gilt daher  $A^I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  ( die gesuchte Inverse von  $A$  )

Man kann überprüfen, dass  $A \cdot A^I = A^I \cdot A = E$  gilt .

Beispiel 2:  $A = \begin{pmatrix} 48 & 60 & 2220 \\ 16 & 21 & 765 \\ 29 & 38 & 1385 \end{pmatrix}$  Wegen  $A \cdot A^I = E$  folgt  $\begin{pmatrix} 48 & 60 & 2220 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & 21 & 765 & 0 & 1 & 0 \\ 29 & 38 & 1385 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Der Gauß-Algorithmus liefert dann:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 & 0 & -38 & 21 \\ 0 & 1 & 25 & 0 & 29 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 84 & -48 \end{pmatrix}$

Hier entsteht in der linken Hälfte der erweiterten Koeffizientenmatrix nicht die gewünschte Einheitsmatrix  $E$  .

Daher gibt es keine Inverse für  $A$  ,  $A$  ist singulär !

Anmerkung:

Die Singularität von  $A$  kann man auch durch Berechnung der Determinante feststellen, da  $\det(A) = 0$  gilt !

## Die LR ( LU ) - Zerlegung :

Jede reguläre (n,n)-Matrix A kann in eine linke (untere) Dreiecksmatrix L ( mit Einsen auf der Hauptdiagonale ) und eine rechte (obere) Dreiecksmatrix R ( alle Diagonalelemente  $\neq 0$  ) zerlegt werden. Es gilt dann:  $A = L \cdot R$  bzw.  $P \cdot A = L \cdot R$  bei Zeilenvertauschung ( P = Permutationsmatrix; s.u.)

Anmerkung: Die englische Bezeichnung ist LU , wobei L = Lower und U = Upper bedeuten .

Beispiel (ohne Zeilenvertauschung):  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$       Gesucht:  $L \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \\ g & h & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$

Man geht vor wie beim Gauß-Algorithmus zur Bestimmung der Zeilenstufenform. Allerdings werden hier in der linken Dreiecksmatrix keine Nullen erzeugt, sondern es werden die Faktoren gespeichert, die man benötigt, um (beim Gauß-Algorithmus) die 0 an der betreffenden Stelle zu erzeugen.

Konkret: Im ersten Schritt betrachtet man die Zahl 2 in Spalte1;Zeile1 . Um in der 2.Zeile die 3 zur 0 zu machen, benötigt man den Faktor 1,5. Subtrahiert man nämlich das 1,5-fache der 1.Zeile von der 2.Zeile, dann würde aus der 3 eine 0. Also speichert man anstelle der 3 eine 1,5. Der Rest der Zeile wird wie beim Gauß-Algorithmus verändert. Entsprechend muss man in der Spalte1;Zeile3 aus der 1 eine 0,5 machen, denn es muss das 0,5-fache der 1.Zeile von der 2.Zeile subtrahiert werden.

Zwischenergebnis:  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1,5 \end{pmatrix}$

Genauso wie beim Gauß-Algorithmus betrachtet man anschließend nur noch den (2,2)-Matrixanteil rechts unten. Ziel wäre, die 0,5 in Spalte2;Zeile3 zu 0 zu machen. Dies gelingt mit dem Faktor 1, den wir anstelle der 0,5 speichern. Die letzte verbleibende Zahl 1,5 wird ersetzt durch  $1,5 - 1 \cdot 0,5 = 1$  .

Das Endergebnis der Umformungen ist:  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

In dieser Matrix steckt sowohl L als auch R. Bei L muss berücksichtigt werden, dass alle Diagonalelemente 1 sein sollen (obwohl dies hier nicht zu sehen ist). Damit erhält man als

Lösung:  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  und  $R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Man sieht, dass R die gleiche Matrix ist, die bei der normalen Zeilenstufenform entsteht !  
L wird zusätzlich erzeugt durch Speichern der o.a. Faktoren anstelle der Nullen.

Ein positiver Nebeneffekt ist, dass man mit der LR-Zerlegung in einfacher Weise auch die Determinante der Matrix A berechnen kann (Vorsicht: Bei Pivottisierung/Zeilentausch kann sich das Vorzeichen ändern !):

Es gilt: [det\(A\) ist das Produkt der Diagonalelemente von R \( ohne Zeilenvertauschungen !\)](#)  
( Bei einer ungeraden Anzahl von Zeilenvertauschungen ändert sich das Vorzeichen )

Für das obige Beispiel ist dann  $\det(A) = 2 \cdot 0,5 \cdot 1 = 1$  .

Der Vorteil der LR-Zerlegung ist, dass man simultan LGSe lösen kann :

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow (L \cdot R) \cdot \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow L \cdot (R \cdot \vec{x}) = \vec{b} \Rightarrow L \cdot \vec{y} = \vec{b} \text{ mit } \vec{y} = R \cdot \vec{x} .$$

Man löst daher zuerst  $L \cdot \vec{y} = \vec{b}$  und anschließend  $R \cdot \vec{x} = \vec{y}$  ( beides sind einfache Berechnungen) .

Sei  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  gesetzt. Dann verläuft die Rechnung für  $L \cdot \vec{y} = \vec{b}$  folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 \\ 1,5 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0,5 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dann noch die Lösung für  $R \cdot \vec{x} = \vec{y}$  :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 12 \\ 0 & 1 & 1 & | & -8 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 6 \\ 0 & 1 & 0 & | & -13 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Weitere Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \\ -2 & -7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$$

$A \qquad \qquad L \qquad \qquad R$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 10 & 17 \\ 8 & 14 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 2 \cdot 1 \cdot 4 = 8 .$$

$A \qquad \qquad L \qquad \qquad R$

Achtung:

Falls eine Pivotisierung notwendig sein sollte, so müssten die Zeilenvertauschungen berücksichtigt werden.

Dies kann durch Multiplikation mit Permutationsmatrizen P geschehen. Es gilt:  $P \cdot A = L \cdot R$

Dies lässt sich umformen in  $A = P^{-1} \cdot L \cdot R = (P^{-1} \cdot L) \cdot R = (P \cdot L) \cdot R$  , da  $P^{-1} = P!$

Für  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$  folgt dann:  $(P \cdot L) \cdot R \cdot \vec{x} = \vec{b}$  bzw.  $(P \cdot L) \cdot \vec{y} = \vec{b}$  mit  $R \cdot \vec{x} = \vec{y}$  .

Im Gegensatz zu der obigen Rechnung verwendet man bei Zeilenvertauschungen also  $P \cdot L$  statt  $L!$

Dies wird später auch an einem Beispiel durchgerechnet.

## Permutationsmatrizen P

Bei Permutationsmatrizen (**Vertauschungsmatrizen**) steht in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine 1, ansonsten Nullen.

- (1) Multipliziert man eine Matrix A von links mit P, also PA, so tauscht man damit Zeilen.  
 $p_{ik} = 1$  bedeutet dabei, dass aus der k-ten Zeile die i-te Zeile wird.  $ze\ k \rightarrow ze\ i$

Beispiele:

$$P = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad PA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{keine Veränderung durch } P = E !$$

Vertauscht man aber bei P die Zeilen 1 und 2, erzeugt man also  $p_{12} = 1$  :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad PA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Vertauschung der Zeilen 1 und 2 bei A !}$$

- (2) Multipliziert man eine Matrix A von rechts mit P, also AP, so tauscht man damit Spalten.  
 $p_{ik} = 1$  bedeutet dabei, dass aus der i-ten Spalte die k-te Spalte wird.  $sp\ k \rightarrow sp\ i$

Beispiel: Bei Verwendung der obigen Matrix P mit  $p_{12} = 1$  entsteht folgendes:

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ A & & P & & \end{matrix}$$

Bei der LR-Zerlegung kann es zur Vertauschung zweier Zeilen von A kommen. Das nach der Vertauschung entstandene A berechnet man durch die Multiplikation  $P \cdot A$ .

Für die LR-Zerlegung (mit Pivottisierung) des folgenden Beispiels  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  bedeutet das zunächst

eine Vertauschung der Zeilen 1 und 2.

Die entsprechende Permutationsmatrix ist  $P = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ansatz für die LR-Zerlegung der durch Zeilentausch erhaltenen Matrix PA :

$$PA = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2/3 & \boxed{-1/3} & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 4/3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Für A folgt dann:}$$

$L \setminus R$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$L \qquad R$

Bei der Pivotisierung können unter Umständen mehrere Zeilenvertauschungen anfallen, so dass entsprechend viele Permutationsmatrizen  $P_1, P_2, \dots, P_n$  entstehen.  
Die Gesamtpermutationsmatrix  $P$  ergibt sich dann zu  $P = P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_n$ .

Ein Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{24} & 0 & -12 & -12 \\ 6 & 6 & 18 & 0 \\ 6 & 18 & 66 & 18 \\ -12 & 0 & 18 & 84 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 1/4 & \boxed{6} & 21 & 3 \\ 1/4 & 18 & 69 & 21 \\ -1/2 & 0 & 12 & 78 \end{pmatrix} \quad P_1 = E \quad \text{Kein Tausch (P}_1 \text{ überflüssig !)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 1/4 & \boxed{18} & 69 & 21 \\ 1/4 & 6 & 21 & 3 \\ -1/2 & 0 & 12 & 78 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 1/4 & 18 & 69 & 21 \\ 1/4 & 1/3 & \boxed{-2} & -4 \\ -1/2 & 0 & 12 & 78 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Tausch Zeilen 2 ; 3}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 1/4 & 18 & 69 & 21 \\ -1/2 & 0 & \boxed{12} & 78 \\ 1/4 & 1/3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 1/4 & 18 & 69 & 21 \\ -1/2 & 0 & \boxed{12} & 78 \\ 1/4 & 1/3 & -1/6 & 9 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Tausch Zeilen 3 ; 4}$$

Die Zerlegungsmatrizen sind  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & -1/6 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 18 & 69 & 21 \\ 0 & 0 & 12 & 78 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Die Determinante berechnet sich zu  $\det(A) = 24 \cdot 18 \cdot 12 \cdot 9 = 46656$

**Anmerkung:** Bei einer ungeraden Anzahl von Zeilenvertauschungen kehrt sich das Vorzeichen von  $\det$  um !

Multipliziert man  $L$  mit  $R$ , so erhält man  $L \cdot R = \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 6 & 18 & 66 & 18 \\ -12 & 0 & 18 & 84 \\ 6 & 6 & 18 & 0 \end{pmatrix}$

Um zur ursprünglichen Matrix  $A$  zurückzukehren, müsste man erst die Zeilen 3;4 tauschen und dann 2;3. Die oben durchgeführten Vertauschungen werden also rückgängig gemacht.

Ebenso kann man aber  $(P_2 \cdot P_3) \cdot (L \cdot R)$  berechnen, denn:  $P = P_3 P_2 \Rightarrow P^{-1} = P_2 P_3$ . Dies ergibt :

$$(P_2 \cdot P_3) \cdot (L \cdot R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 6 & 18 & 66 & 18 \\ -12 & 0 & 18 & 84 \\ 6 & 6 & 18 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 6 & 18 & 66 & 18 \\ -12 & 0 & 18 & 84 \\ 6 & 6 & 18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 6 & 6 & 18 & 0 \\ 6 & 18 & 66 & 18 \\ -12 & 0 & 18 & 84 \end{pmatrix} = A$$

Will man nun mit dieser LR-Zerlegung das Problem  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$  lösen, so berechnet man erst (wie bereits weiter oben bewiesen)  $\vec{y}$  mittels  $(P^{-1} \cdot L) \cdot \vec{y} = \vec{b} \Rightarrow (P_2 \cdot P_3 \cdot L) \cdot \vec{y} = \vec{b}$  und dann  $R \cdot \vec{x} = \vec{y}$ .

Beispiel:  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 36 \\ 18 \\ 24 \\ -96 \end{pmatrix}$ . Mit  $P^{-1} \cdot L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & -1/6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & -1/6 & 1 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

und  $(P^{-1} \cdot L) \cdot \vec{y} = \vec{b}$  :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 36 \\ 1/4 & 1/3 & -1/6 & 1 & | & 18 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 & | & 24 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 & | & -96 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 36 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -78 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 36 \\ 15 \\ -78 \\ -9 \end{pmatrix}$

Aus  $R \cdot \vec{x} = \vec{y}$  folgt:  $\begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 & | & 36 \\ 0 & 18 & 69 & 21 & | & 15 \\ 0 & 0 & 12 & 78 & | & -78 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & | & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$ .

Die Lösung des LGS  $\begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & -12 \\ 6 & 6 & 18 & 0 \\ 6 & 18 & 66 & 18 \\ -12 & 0 & 18 & 84 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 36 \\ 18 \\ 24 \\ -96 \end{pmatrix}$  ist demnach  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Weiteres Beispiel (Lösung mit LR-Zerlegung; mit Zeilentausch):

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$   $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}$ . Die Rechnung liefert  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}$   $R = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$   $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Aus  $(P^{-1} \cdot L) \cdot \vec{y} = \vec{b}$  folgt:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 15 \\ 0 & 1 & 1 & | & -29/4 \end{pmatrix}$ , also  $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ -29/4 \end{pmatrix}$ .

Aus  $R \cdot \vec{x} = \vec{y}$  folgt:  $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 5 & 4 & | & 15 \\ 0 & 0 & -2 & | & -29/4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1/40 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/10 \\ 0 & 0 & 1 & | & 29/8 \end{pmatrix}$ . Lösung:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1/40 \\ 1/10 \\ 29/8 \end{pmatrix}$

## Besondere Matrizen:

1) Die **Hilbert-Matrix** ist ein Beispiel für schlecht konditionierte Matrizen.

Ihre Definition ist:  $\text{hilb}(i, k, n) = 1/(i+k+1)$  für  $i=0(1)n$  und  $k=0(1)n$

Beispiel:  $\text{hilb}(i, k, 6)$

Hier ist  $\text{hilb}(0, 0, 6) = 1$   $\text{hilb}(0, 1, 6) = 1/2$   $\text{hilb}(0, 2, 6) = 1/3$  usw.

1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7
1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9
1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10
1/6	1/7	1/8	1/9	1/10	1/11

Inverse(A) :

36	-630	3360	-7560	7560	-2772
-630	14700	-88200	211680	-220500	83160
3360	-88200	564480	-1411200	1512000	-582120
-7560	211680	-1411200	3628800	-3969000	1552320
7560	-220500	1512000	-3969000	4410000	-1746360
-2772	83160	-582120	1552320	-1746360	698544

Interessant ist, dass die Determinante der obigen Hilbertmatrix den Wert  $\det = 1/186313420339200000$  hat, was dezimal in etwa  $5,3673 \cdot 10^{-18}$  entspricht.

Bei Berechnung mit Gleitkomma-Arithmetik könnte man meinen, dass dies dem Wert 0 entspricht, was aber ein Trugschluss ist !

2) Die (symmetrische) **Rosser-Matrix** ist ebenfalls problematisch für Gleitkomma-Arithmetik.

Ihre Darstellung ist:

611	196	-192	407	-8	-52	-49	29
196	899	113	-192	-71	-43	-8	-44
-192	113	899	196	61	49	8	52
407	-192	196	611	8	44	59	-23
-8	-71	61	8	411	-599	208	208
-52	-43	49	44	-599	411	208	208
-49	-8	8	59	208	208	99	-911
29	-44	52	-23	208	208	-911	99

Interessant ist auch hier die Determinantenberechnung.

Bei exakter Rechnung erhält man den Wert  $\det = 0$ ,

während bei Gleitkomma-Arithmetik ein Wert wie etwa  $-13017.21473$  (Octave-Berechnung) herauskommt !

## Anhang: Linksinverse und rechtsinverse Matrizen - Matrixrang

**Def.:** Gegeben sei eine  $m, n$  - Matrix  $A$ .  
 Eine  $n, m$  - Matrix  $X$  heißt **Linksinverse** von  $A$ , wenn gilt:  $XA = E_n$ .  
 Eine  $n, m$  - Matrix  $X$  heißt **Rechtsinverse** von  $A$ , wenn gilt:  $AX = E_m$ .

**Beispiel 3.2:**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Ansatz für die Rechtsinverse von  $A$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ 4a+3d & 4b+3e & 4c+3f \\ 3a+4d & 3b+4e & 3c+4f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses LGS ist unlösbar (9 Gleichungen mit 6 Unbekannten) . Es gibt **keine** Rechtsinverse !

Ansatz für die Linksinverse von  $A$ :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+4b+3c & a+3b+4c \\ d+4e+3f & d+3e+4f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$\begin{array}{cccccc c} \cdot a & \cdot b & \cdot c & \cdot d & \cdot e & \cdot f & \cdot 1 \\ \hline 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}$	Nach Anwenden von rref folgt: $\begin{array}{cccccc c} \cdot a & \cdot b & \cdot c & \cdot d & \cdot e & \cdot f & \cdot 1 \\ \hline 1 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}$	Daher gibt es 4 Bedingungen: $a + 7c = -3$ $b - c = 1$ $d + 7f = 4$ $e - f = -1$
--	---	--

Es gibt demnach beliebig viele Möglichkeiten für die Linksinverse:

Z.B.:  $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  oder  $X = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  usw. .

**Satz:** Eine  $m, n$  - Matrix  $A$  hat  
 - mindestens eine Linksinverse, wenn gilt: **rang(A) = n**  
 - mindestens eine Rechtsinverse, wenn gilt: **rang(A) = m**

**Weiteres Beispiel (4, 3):**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Eine Rechtsinverse existiert hier nicht, wohl aber eine Linksinverse.



Ansatz für die Linksinverse von A:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a+b+2d & 2a+b+c-d & 3a+2c-d \\ e+f+2h & 2e+f+g-h & 3e+2g-h \\ i+j+2m & 2i+j+k-m & 3i+2k-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

9 Gleichungen mit 12 Unbekannten:

LGS:													rref:														
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m		1	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m		1
1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0		1	1	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0		2
2	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	1	0	-3	0	0	0	0	0	0	0	0		-1
3	0	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	1	-8	0	0	0	0	0	0	0	0		-3
0	0	0	0	1	1	0	2	0	0	0	0		0	0	0	0	0	1	0	0	5	0	0	0	0		-2
0	0	0	0	2	1	1	-1	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0	1	0	-3	0	0	0	0		2
0	0	0	0	3	0	2	-1	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	1	-8	0	0	0	0		3
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	5		1
0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	1	-1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-3		-1
0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	2	-1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-8		-1

9 Bedingungen für beliebig viele Lösungen:

$$\begin{array}{llllll} a + 5d = 2 & b - 3d = -1 & c - 8d = -3 & e + 5h = -2 & f - 3h = 2 & g - 8h = 3 \\ i + 5m = 1 & j - 3m = -1 & k - 8m = -1 & & & \end{array}$$

Mögliche Linksinverse von A:  $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ -7 & 5 & 11 & 1 \\ -4 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

Probe:  $X \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ -7 & 5 & 11 & 1 \\ -4 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  q.e.d.

Übrigens gilt hier:  $\text{rang}(A) = 3$  !!