Bogenlängen

Die Länge eines Grafen (Bogenlänge) einer Funktion f über [a ; b] läßt sich berechnen mit der Formel :

$$\boxed{bl = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}$$

Dies führt in den meisten Fällen auf komplizierte Integranden, die sich häufig nur näherungsweise berechnen lassen.

Beispiele:

1) Die Kettenlinie mit **$f(x) = \cosh(x) = 0{,}5\,(e^x + e^{-x})$**

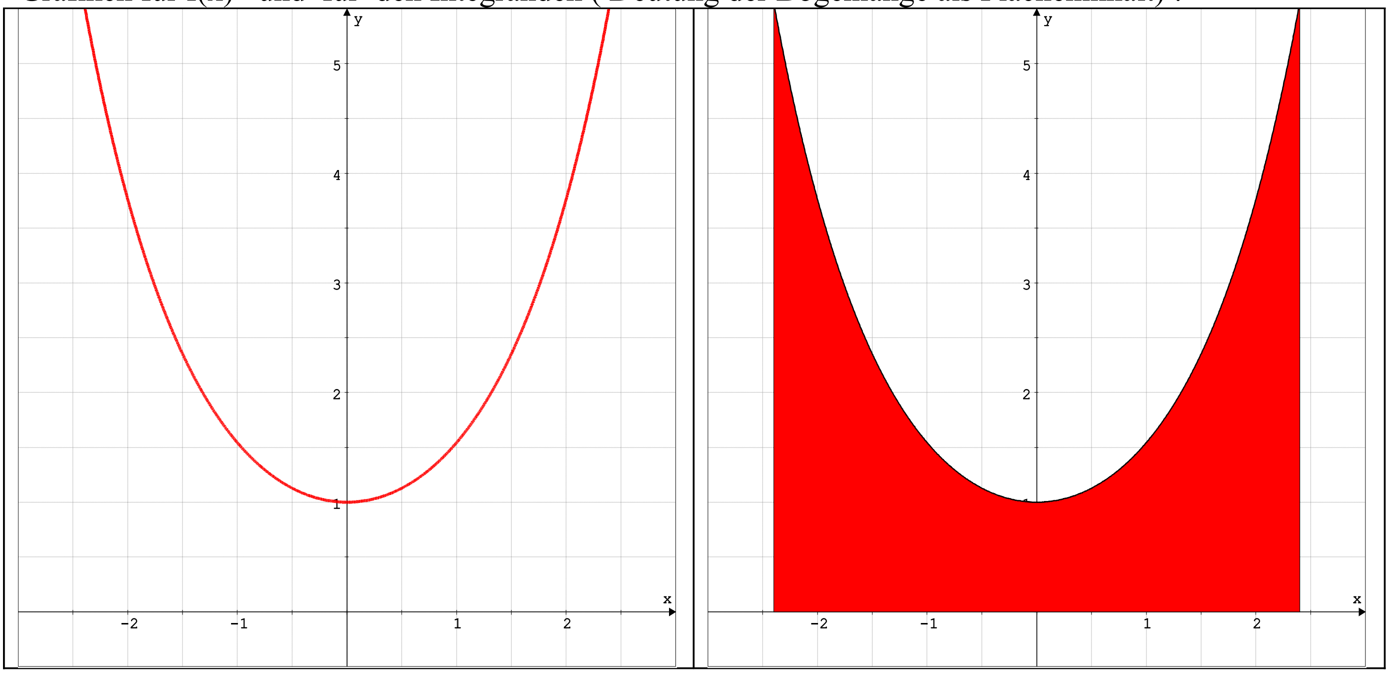
„cosh“ wird gesprochen: „Cosinushyperbolicus“

Es gilt: $f'(x) = 0{,}5\,(e^x - e^{-x})$ und $\sqrt{1 + f'(x)^2} = 0{,}5\,(e^x + e^{-x}) = f(x)$!!

Für die Bogenlänge im Intervall [-b ; b] ergibt sich:

$$bl = 2 \cdot \int_0^b 0{,}5\,(e^x + e^{-x})\,dx = \left[e^x + e^{-x} \right]_0^b = e^b - e^{-b} .$$

Grafiken für f(x) und für den Integranden (Deutung der Bogenlänge als Flächeninhalt) :



Anmerkung: Für die allgemeine Kettenlinie mit $f(x) = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ erhält man nach einer entsprechenden Rechnung $bl = a(e^{\frac{b}{a}} - e^{-\frac{b}{a}})$

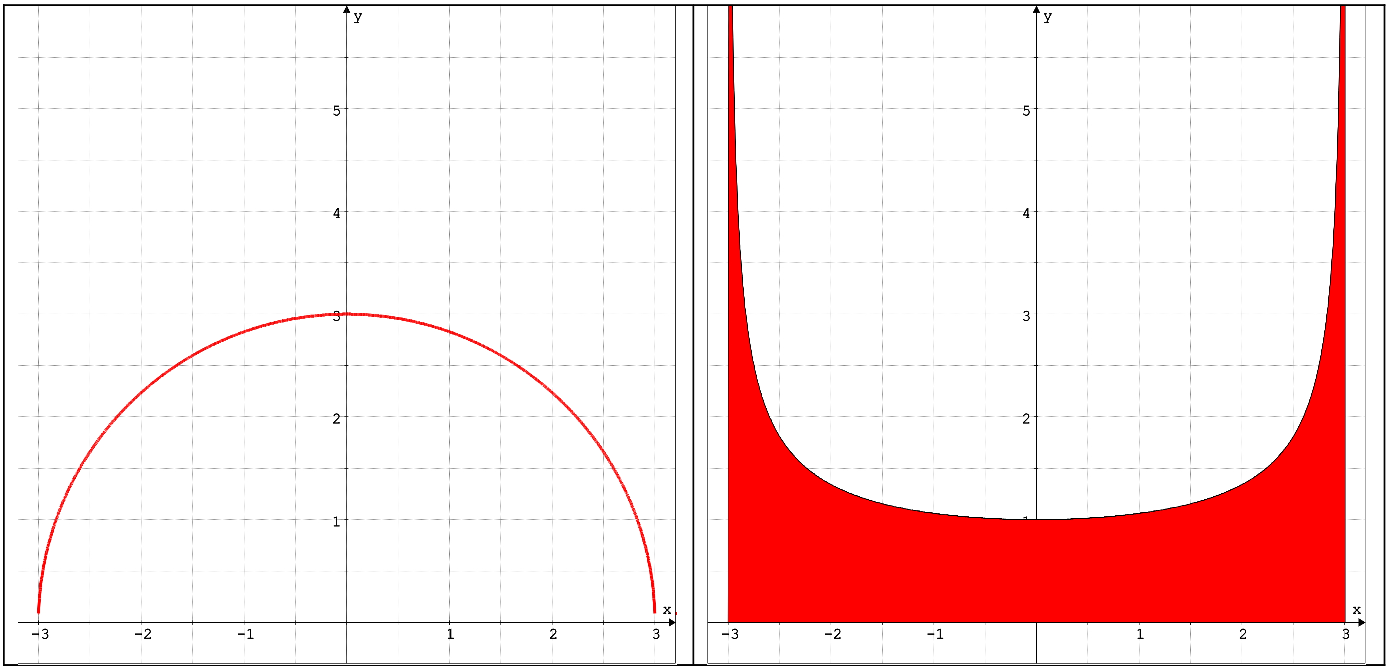
2) Der Halbkreis mit dem Radius r :	**f(x) =** $\sqrt{r^2 - x^2}$

Es gilt: $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ und somit $\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{r^2 - x^2}} = \sqrt{\dfrac{r^2}{r^2 - x^2}} = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

Für die Bogenlänge im Intervall [-r ; r] ergibt sich:

$bl = 2r \cdot \int_0^r \dfrac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx$. Dies ist ein schwer zu lösendes Integral (Lösung: $\arccos(\frac{x}{r})$) !

Zunächst wieder die Grafen von Funktion f(x) und Integrand $\sqrt{1 + f'(x)^2}$:



Achtung: Beim Integranden ergibt sich ein sogenanntes „uneigentliches" Integral (für das sich aber ein endlicher Wert berechnen läßt !) . Uneigentlich deswegen, weil $\dfrac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \to \infty$ für $x \to \pm 3$.

Die Lösung des Integrals gelingt mit dem Substitutions-Ansatz: $x = r \cdot \cos(\varphi)$, d.h. $\varphi = \arccos(\frac{x}{r})$

Es ist dann $dx = -r \cdot \sin(\varphi)\, d\varphi$. Für die neuen Grenzen (für φ) erhält man $\varphi = 0{,}5\pi$ und $\varphi = 0$.

Die Bogenlänge des Halbkreises ist dann:

$$bl = 2r \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-r \cdot \sin(\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{r^2(1 - \cos^2\varphi)}} = 2r \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi}} = 2r \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 2r \cdot [\ \varphi\ ]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\, r\ ,$$ was zu zeigen war !

Im übrigen sieht man, dass als Stammfunktion φ herauskommt, was aber gleich $\arccos(\frac{x}{r})$ ist !

<u>Hinweis:</u> Auch die Substitution x = x = r · sin(φ) wäre erfolgreich gewesen (Arkussinus als Lös. !)

3) Die Funktion mit **f(x) =** $\frac{x^4 + 3}{6x}$

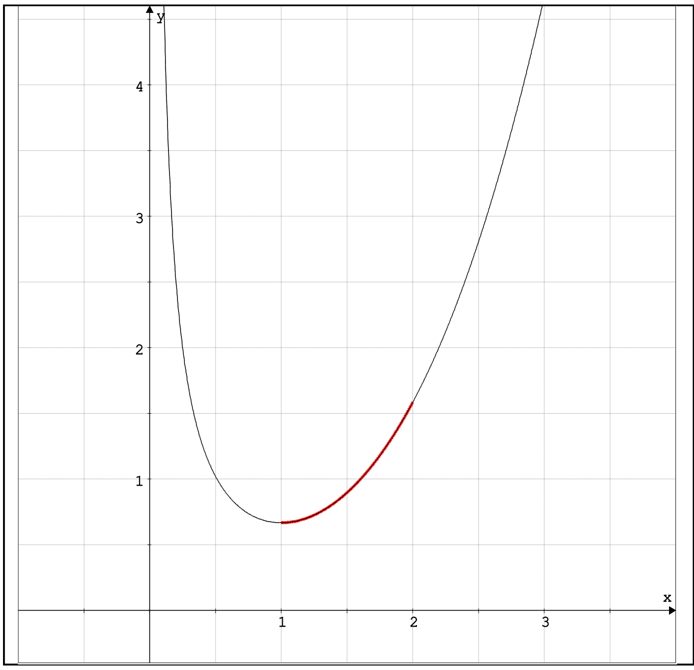
Es gilt: $f'(x) = \frac{6x \cdot 4x^3 - (x^4+3)\cdot 6}{36x^2} = \ldots = \ldots = \frac{x^4 - 1}{2x^2}$ und somit

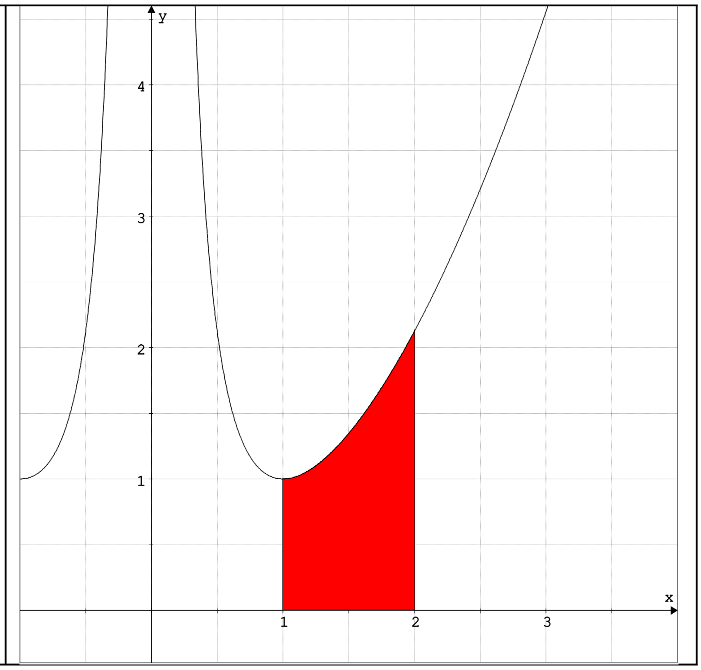
$$\sqrt{1+f'(x)^2} = \sqrt{1+\frac{(x^4-1)^2}{4x^4}} = \sqrt{\frac{4x^4+x^8+1-2x^4}{4x^4}} = \sqrt{\frac{2x^4+x^8+1}{4x^4}} = \sqrt{\frac{(x^4+1)^2}{4x^4}} = \frac{x^4+1}{2x^2}$$

Für die Bogenlänge im Intervall [1 ; 2] ergibt sich:

$$bl = \int_1^2 \frac{x^4+1}{2x^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 x^2 + \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{17}{12} \approx 1{,}42\,.$$

Die Grafen von Funktion $f(x) = \frac{x^4 + 3}{6x}$ und Integrand $\sqrt{1+f'(x)^2} = \frac{x^4+1}{2x^2}$





4) Die Normalparabel mit **$f(x) = x^2$**

Es gilt: $f'(x) = 2x$ und somit $\sqrt{1+f'(x)^2} = \sqrt{1+(2x)^2}$

Für die Bogenlänge im Intervall [0 ; 3] ergibt sich:

$bl = \int_0^3 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \;?$ Eine Stammfunktion lässt sich über eine Substitution finden :

$2x = \sinh(t) := \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$. Daraus ergeben sich folgende Terme :

$$\sqrt{1+(2x)^2} = \sqrt{\frac{4}{4}+\frac{1}{4}(e^{2t}-2+e^{-2t})} = \sqrt{\frac{4+e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}} = \sqrt{\frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4}} = \sqrt{\frac{(e^t+e^{-t})^2}{4}} = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$$

Die Ableitung: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}(e^t+e^{-t}) \Leftrightarrow dx = \frac{1}{4}(e^t+e^{-t})\,dt$

Die Grenzen: Für $x = 0$ erhält man $0 = \sinh(t) \Rightarrow t = \operatorname{arsinh}(0) = 0$

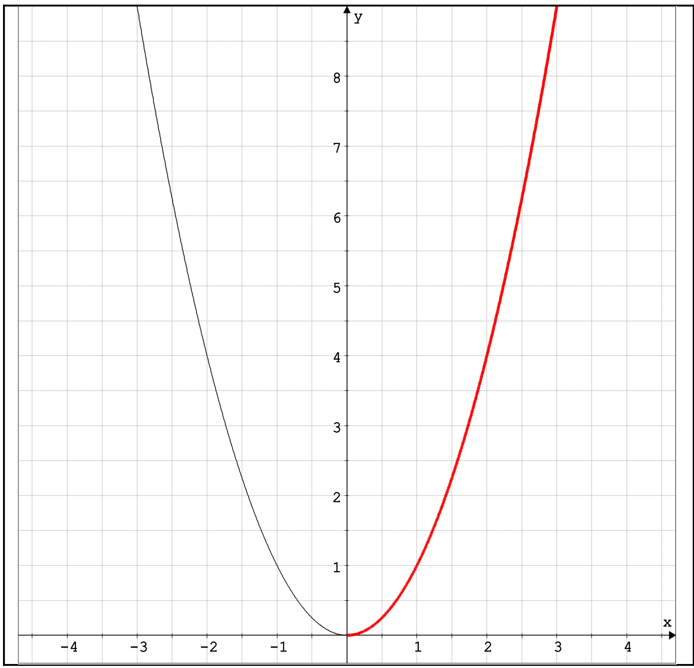
Für $x = 3$ erhält man $6 = \sinh(t) \Rightarrow t = \operatorname{arsinh}(6) = \ln(6+\sqrt{1+6^2}) = \ln(6+\sqrt{37})$

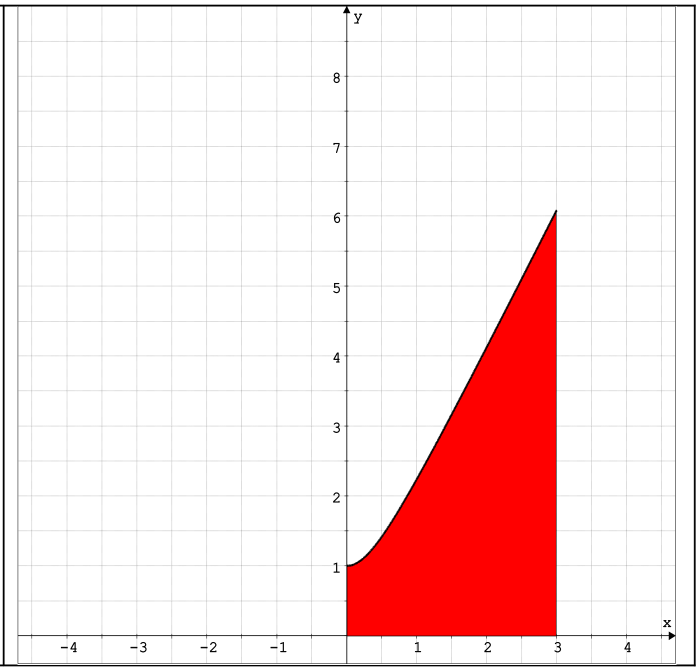
Dann ist $bl = \frac{1}{8}\int_0^{\ln(6+\sqrt{37})} (e^t+e^{-t})^2\,dt = \frac{1}{8}\int_0^{\ln(6+\sqrt{37})} (e^{2t}+e^{-2t}+2)\,dt = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t}+2t\right]_0^{\ln(6+\sqrt{37})} =$

$$\frac{1}{16}e^{2\ln(6+\sqrt{37})} - \frac{1}{16}e^{-2\ln(6+\sqrt{37})} + \frac{1}{4}\ln(6+\sqrt{37}) = \frac{(6+\sqrt{37})^2}{16} - \frac{1}{16(6+\sqrt{37})^2} + \frac{\ln(6+\sqrt{37})}{4} =$$

$$\frac{3\sqrt{37}}{2} + \frac{\ln(6+\sqrt{37})}{4} = \frac{6\sqrt{37}+\ln(6+\sqrt{37})}{4} \approx 9{,}74709$$

Die Grafen von Funktion $f(x) = x^2$ und Integrand $\sqrt{1+f'(x)^2} = \sqrt{1+(2x)^2}$





<u>Anmerkung:</u>

Allgemein gilt die Formel $\int \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln(2x+\sqrt{1+4x^2})$

5) Die Ellipse mit **f(x) =** $b\cdot\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2} = \frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}$; a und b sind die Halbachsen bzgl. x und y

Es gilt: $f'(x) = -\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ und somit

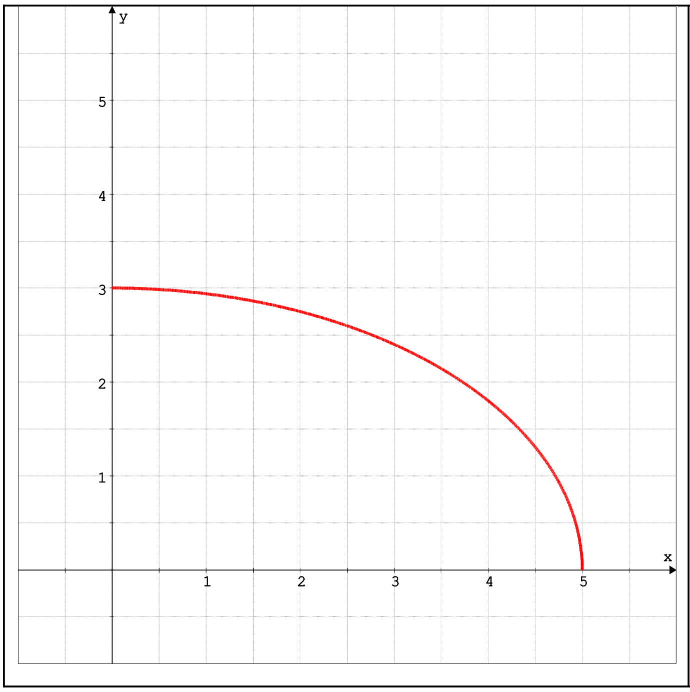
$$\sqrt{1+f'(x)^2} = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^2}{a^2-x^2}} = \sqrt{\frac{a^2(a^2-x^2)+b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}} = \frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{a^4+(b^2-a^2)x^2}{a^2-x^2}}$$

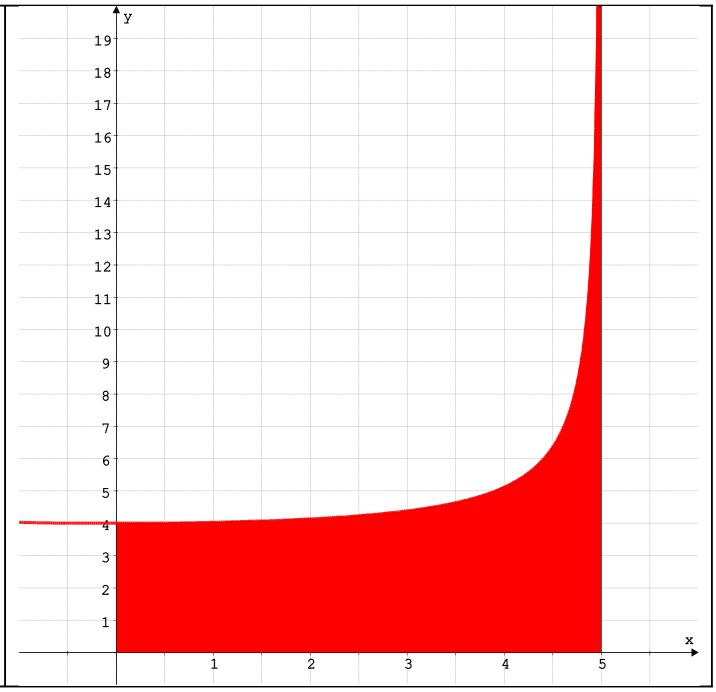
Für die Bogenlänge (Ellipsenumfang !) ergibt sich : $U_{Ellipse} = \frac{4}{a}\cdot\int_0^a\sqrt{\frac{a^4+(b^2-a^2)x^2}{a^2-x^2}}\,dx = \ ?$

Eine Stammfunktion gibt es nicht (Elliptisches Integral !)
Der Integrand besitzt einen Pol an der Stelle x = a !

Die Grafen von Funktion $f(x) = \frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}$ und Integrand $\sqrt{1+f'(x)^2} = \frac{4}{a}\sqrt{\frac{a^4+(b^2-a^2)x^2}{a^2-x^2}} =$

$\frac{4}{5}\sqrt{\frac{625-16x^2}{25-x^2}}$ für a = 5 und b = 3





a) Lösung mithilfe von Näherungsformeln:

a1) $U_{Ellipse} \approx \pi\cdot\left|(a+b)\cdot 1{,}5-\sqrt{a\cdot b}\right|$ a2) $U_{Ellipse} \approx \pi\cdot(a+b)\cdot\frac{64-3k^4}{64-16k^2}$ $mit \quad k = \frac{a-b}{a+b}$

b) Versuch einer approximativen Lösung über Trapezintegration (Vorsicht: x = 5 nicht verwendbar !)

Vergleiche mit der Näherung $U_{Ellipse} \approx 25{,}527$ LE

Hinweise zur Lösung auf der nächsten Seite .

Wir berechnen $\frac{4}{5}\cdot\int_0^5 \sqrt{\frac{625-16x^2}{25-x^2}}\,dx$ approximativ durch den folgenden „Trapez-Term“ :

$$U \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(f(x_i)+f(x_{i-1}))\cdot\Delta x = \frac{\Delta x}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(x_i)+f(x_{i-1}) = \frac{\Delta x}{2}\cdot(f(a)+f(b)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i))$$

Trapezformel allgemein :

$$Integral \approx \frac{\Delta x}{2}\cdot(f(a)+f(b)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)) \quad mit \ \Delta x=\frac{b-a}{n} \quad und \quad x_i = i\cdot\Delta x$$

Speziell für die Ellipse gelten : a = 0 ; b = 5 ; $f(x_i)=\frac{4}{5}\cdot\sqrt{\frac{625-16x_i^2}{25-x_i^2}}$.

Wegen des Pols an der Stelle x = 5 müssen wir die untere Grenze b ersetzen durch b-ε !

Wir wählen z.B. $\varepsilon = \frac{\Delta x}{5} = \frac{5-0}{n\cdot 5} = \frac{1}{n}$. Also gilt: $x_n = 5-\frac{1}{n}$ und $\Delta x = \frac{5}{n}$

Der Approximationswert für den Ellipsenumfang ist dann etwas zu klein !

Es gelten daher die folgenden Formeln:

$$U_{Ellipse} \approx \frac{5}{2n}\cdot(f(0)+f(5-\frac{1}{n})+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)) \quad mit \quad x_i = i\cdot\frac{5}{n} \quad ; \quad f(x_i)=\frac{4}{5}\sqrt{\frac{625-16x_i^2}{25-x_i^2}}$$

Ein Computerprogramm (z.B. Delphi) liefert folgende Tabelle :

n	100	1000	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$U_{Ellipse}$	25,237	25,435	25,498	25,518	25,524	25,526	25,527

Auszug aus dem Delphi-Programm:

```
procedure TForm1.TrapezGoClick(Sender: TObject);
begin
  n := StrToInt(Edit_n.text);
  a := TermEdit_a.f(x);
  b := TermEdit_b.f(x);
  dx := (b - a)/n;
  Summe := 0.0;
  Edit_Summe.SetFocus;
  for i:=1 to n-1 do
    begin
      x := a + i*dx;
      Summe := Summe + TermEdit_fx.f(x);
    end;
  Summe := 2*Summe;
  if Polstelle_a.checked
    then x := a + dx/5
    else x := a; Summe := Summe + TermEdit_fx.f(x);
  if Polstelle_b.checked
    then x := b - dx/5
    else x := b; Summe := Summe + TermEdit_fx.f(x);
  Summe := Summe*dx/2;
  Edit_Summe.text:=
FloatToStrF(Summe,ffFixed,20,Anzahl_Nachkommastellen);
end;
```

TI-92 – Anweisungen

i /n*5 STO x(i)

4/5*√((625-16*x*x):(25-x*x)) STO f(x)

2,5/n*(f(x(0))+∑(f(x(i)),i,1,n-1) STO U(n)

Bem.: Ohne $f(x_n)$ berechnet !!

Ergebnisse:

(vor Aufruf von U(n) erst Wert von n speichern !)

U(10) = 19,01

U(100) = 24,28

U(200) = 24,65

U(500) = 24,97

U(1000) = 25,14

Sehr lange Rechenzeiten !!

Die Probleme mit der Polstelle lassen sich vermeiden, wenn man (wie beim Kreis) eine Substitution verwendet ! Dies wird im folgenden erläutert:

Lösung mittels Substitution $x = a\cos(t)$ und $y = b\sin(t)$

Es ist dann $x^2 = a^2\cos^2(t)$ und $dx = -a\sin(t)\,dt$

Für die Grenzen gilt: $x = 0 \Rightarrow t = 0{,}5\pi$ und $x = a \Rightarrow t = 0$

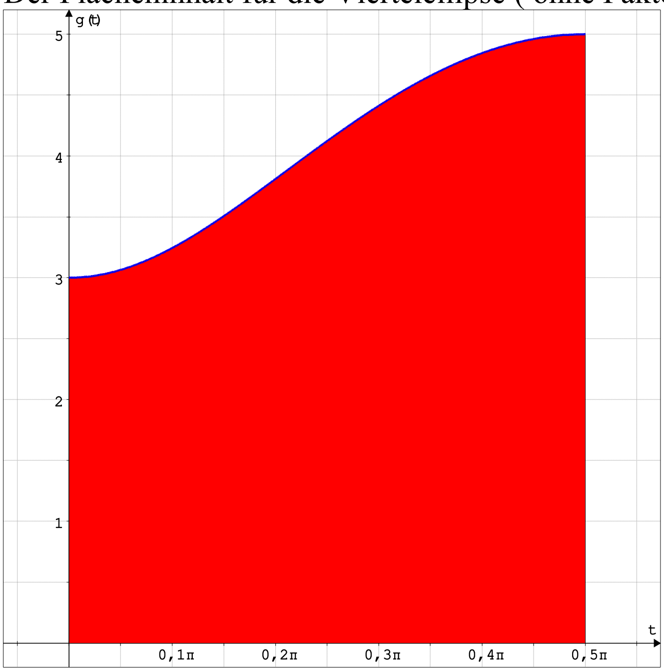
Also $U_{Ellipse} = 4\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{\frac{a^4+(b^2-a^2)a^2\cos^2(t)}{a^2(a^2-a^2\cos^2(t))}}\cdot(-a)\sin(t)dt = 4\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{a^2+(b^2-a^2)\cos^2(t)}{a^2-a^2\cos^2(t)}}\cdot a\cdot\sin(t)dt =$

$4\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{a^2(1-\cos^2(t))+b^2\cos^2(t)}{a^2(1-\cos^2(t))}}\cdot a\cdot\sin(t)dt = 4\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}{a^2\sin^2(t)}}\cdot a\cdot\sin(t)dt =$

$4\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}\cdot\frac{a\cdot\sin(t)}{a\cdot\sin(t)}dt = 4\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}\,dt$ (Elliptisches Integral !)

Auch für diese Wurzelfunktion gibt es keine Stammfunktion. Das Integral lässt sich nur approximativ lösen, wobei aber kein Pol auftritt (siehe Graf !)

Der Flächeninhalt für die Viertelellipse (ohne Faktor 4) sieht so aus :



Die Trapezintegration für den Gesamtumfang U :

$$U_{Ellipse} \approx \frac{\pi}{4n}\cdot\left(f(x_0)+f(x_n)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right) \quad \text{mit} \quad x_i = i\cdot\frac{\pi}{2n} \;\; sowie \;\; f(x_i) = 4\cdot\sqrt{25\sin^2(x_i)+9\cos^2(x_i)}$$

Sie liefert als Näherung : $U_{Ellipse} \approx$ 25,527 (sehr schnelle Konvergenz !)

Anm.: Auf das obige Integral kann sehr gut der MWS der Integralrechnung angewandt werden !
Er liefert die Näherung $U_{Ellipse} \approx 8\pi \approx 25{,}13$.