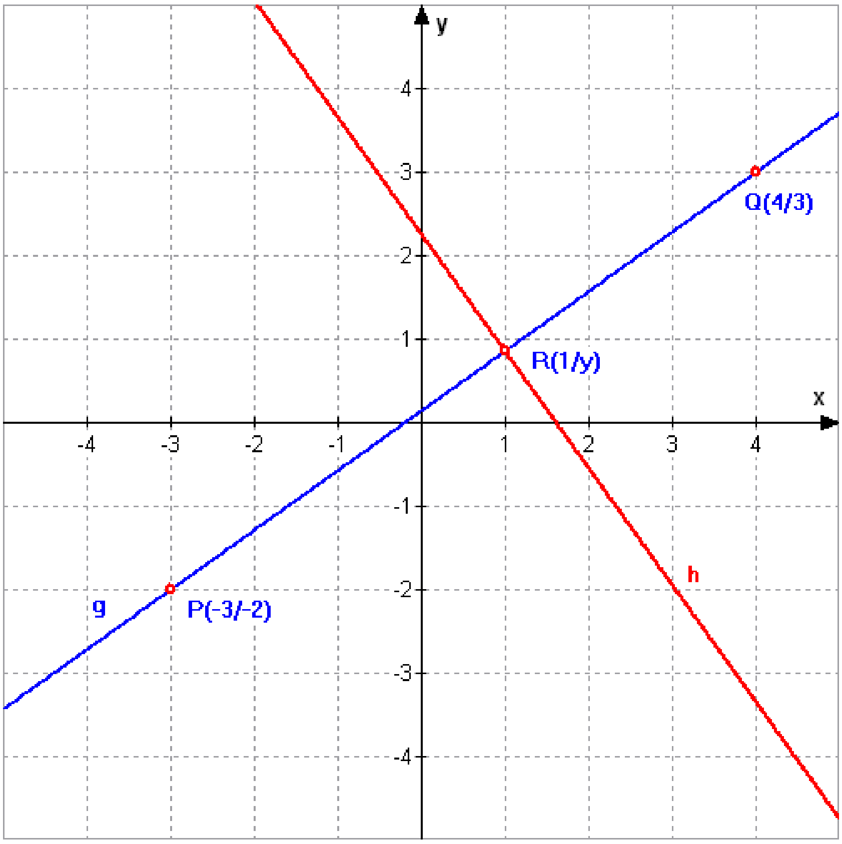
Einstiegsphase Analysis (Jg. 11) Ac

Geradengleichungen:
Eine Gerade g verlaufe durch P(-3/-2) und Q(4/3). Eine Gerade h gehe durch R(1/y) und stehe senkrecht auf g. Zeichne diese Geraden und stelle ihre Gleichungen auf.



<u>Bestimmung der Geradengleichungen:</u>

Allgemeiner Ansatz: $y = m \cdot x + b$ (m = Steigung ; b = y-Achsenabschnitt)

Die Steigung m einer Geraden wird mit dem Steigungsdreieck ermittelt: $\boxed{m = \frac{dy}{dx}}$

Für g erhält man dann $m = \frac{5}{7}$ und für h $m = -\frac{7}{5}$ (Das „Minus“ wegen der fallenden Geraden)

Die Gleichungen sind dann noch nicht vollständig ermittelt. Sie lauten :

g: $y = \frac{5}{7}x + b$ und h: $y = -\frac{7}{5}x + c$

Die y-Achsenabschnitte b bzw. c erhält man, indem man für x und y einen bekannten Punkt der jeweiligen Geraden einsetzt . Dies ist z.B. für g der Punkt Q(4/3) . Man setzt daher in die Gleichung von g den x-Wert 4 sowie den y-Wert 3 ein. Man erhält: $3 = \frac{5}{7} \cdot 4 + b$, woraus $b = \frac{1}{7}$ folgt .

Entsprechend geht man bei h vor . Hier ist R(1/ $\frac{6}{7}$)

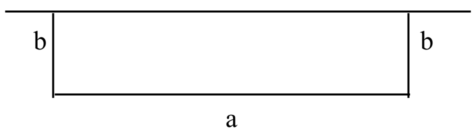
Lösung: g: $y = \frac{5}{7}x + \frac{1}{7}$ und h: $y = -\frac{7}{5}x + \frac{79}{35}$

Weitere Erkenntnisse: Für die Steigungen m_1 und m_2 von zueinander orthogonalen Geraden gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$ Parallele Geraden besitzen die gleiche Steigung m

Extremwertaufgaben

1) Auf einem Grundstück, dessen eine Seite durch eine Felswand begrenzt ist, soll ein rechteckiger Hühnerhof angelegt werden. Dafür stehen 60m Drahtzaun zur Verfügung. Wie müssen Länge und Breite des Hühnerhofes gewählt werden, damit der Flächeninhalt maximal wird ?

Skizze:



Lösung: $A = a \cdot b$ soll maximal werden.
$a + 2b = 60 \quad \Leftrightarrow \quad a = 60 - 2b$ Dies einsetzen in obige Gleichung:
$A(b) = (60 - 2b) \cdot b = 60b - 2b^2$.

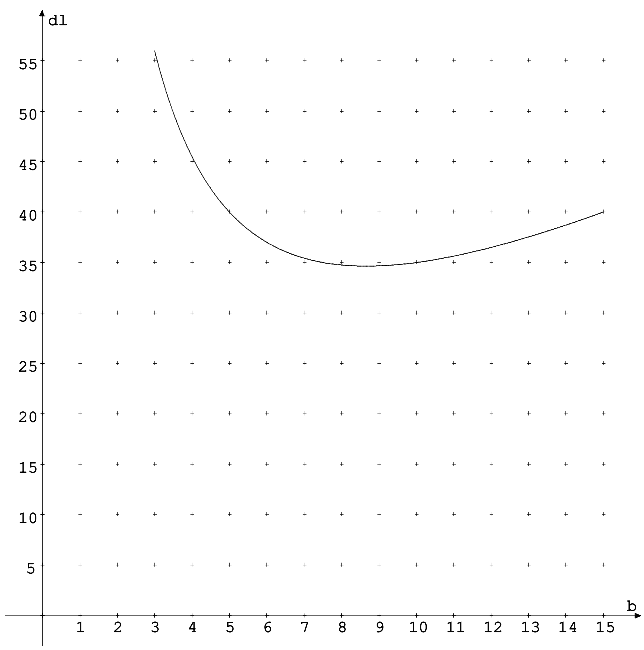
Der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen $b = 0$ und $b = 30$. Der Scheitelpunkt S liegt demnach bei S(15 / 450) !

Antwort: Der maximale Flächeninhalt des Hühnerhofs beträgt $450m^2$, Länge 30m , Breite 15m .

2) Umkehrung der vorigen Aufgabe:
Der Flächeninhalt soll nun fest vorgegeben sein: $A = 150m^2$. Dabei soll möglichst wenig Draht verbraucht werden. (Die Drahtlänge dl soll mininal sein !).

Lösung: $dl = a + 2b$ soll minimal werden.
$A = a \cdot b = 150 \quad \Leftrightarrow \quad a = 150 / b$. Eingesetzt in obige Formel :
$dl(b) = 150 / b + 2b$.

Graph:



Näherungslösung: $b \approx 8{,}7$ (exakt $\sqrt{75}$)
$a \approx 17{,}3$ ($10 \cdot \sqrt{3}$)
$bl \approx 34{,}6$ ($20 \cdot \sqrt{3}$)

Einführung des Ableitungsbegriffes

Beispiel 1:

Bei spiegelglatter Fahrbahn gerät ein Auto ins Rutschen und landet in P(0/6) (s.Grafik) in den Strohballen.

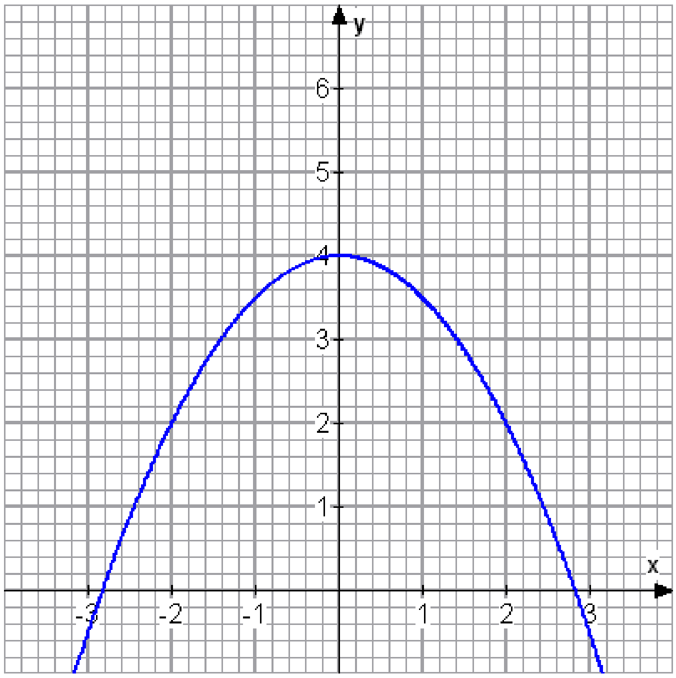
An welchem Punkt S hat das Auto die Fahrbahn verlassen ? Experimentiere mit dem TI83 !

Überlege dazu: Wie lässt sich die Richtung des Autos zum Zeitpunkt des Kontrollverlustes angeben ?

Versuche, eine angemessene Funktionsgleichungen zu finden und übertrage die gefundene Lösung (Grafik) in dein Heft .

Anmerkung:

Die Fahrbahn genüge der Gleichung
$f(x) = 4 – 0{,}5x^2$.
Das Auto möge von links unten kommend längs des Grafen fahren .



Beispiel 2:

Ein Islandbus mit maximal 55% Steigfähigkeit gerät in einen alten Geysir-Krater von 2km Durchmesser und 250m Tiefe. Das Querschnittsprofil ist parabelförmig. Kann der Bus aus eigener Kraft den Krater verlassen ? Falls nicht, wie weit kommt er ?
Versuche eine zeichnerische Lösung . Schätze auch die Steigung am Kraterrand !

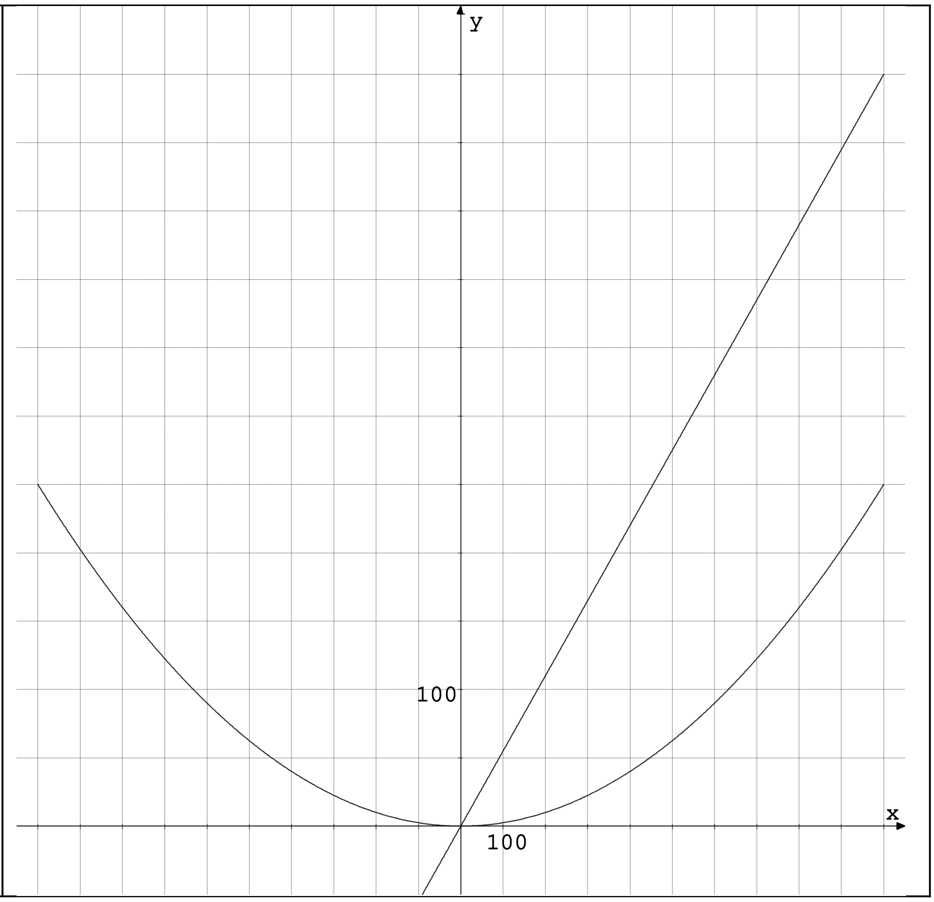
Beispiel 3:

Ein Mondfahrzeug ist in einen paraboloidförmigen Krater geraten. Es kann maximal 40% Steigung bewältigen. Kommt es aus dem Krater heraus, wenn dieser 1,25m tief ist und sein Querschnitt durch die Funktionsgleichung $h(x) = 0{,}1x^2$ beschrieben werden kann ?

Lösung von Beispiel 1: S(-2/2) Geradengleichung y = 2x + 6

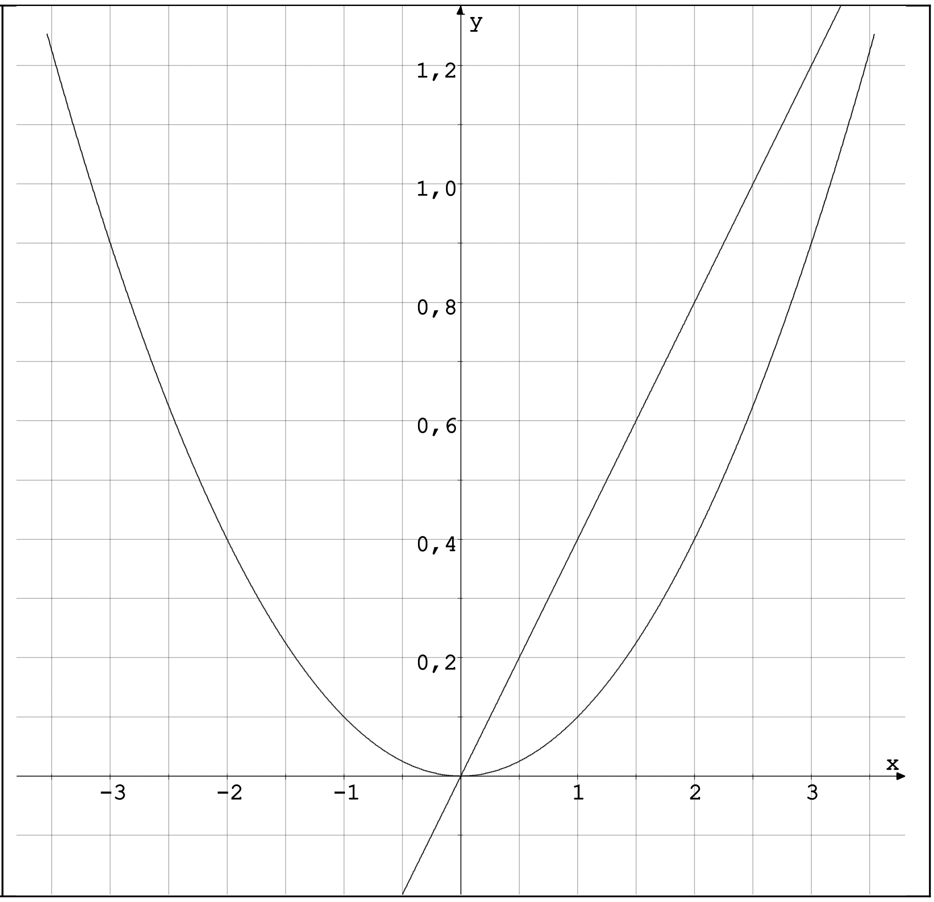
Lösung von Beispiel 2:

Die Ursprungsgerade hat die Steigung des Islandbusses, nämlich m = 0,55 = 55% . Verschiebt man diese parallel bis zum Kraterrand, so erkennt man, dass ihre Steigung größer als die Kratersteigung (diese beträgt am Rand 0,5 = 50%) ist. Der Bus kann somit den Krater verlassen.



Lösung von Beispiel 3:

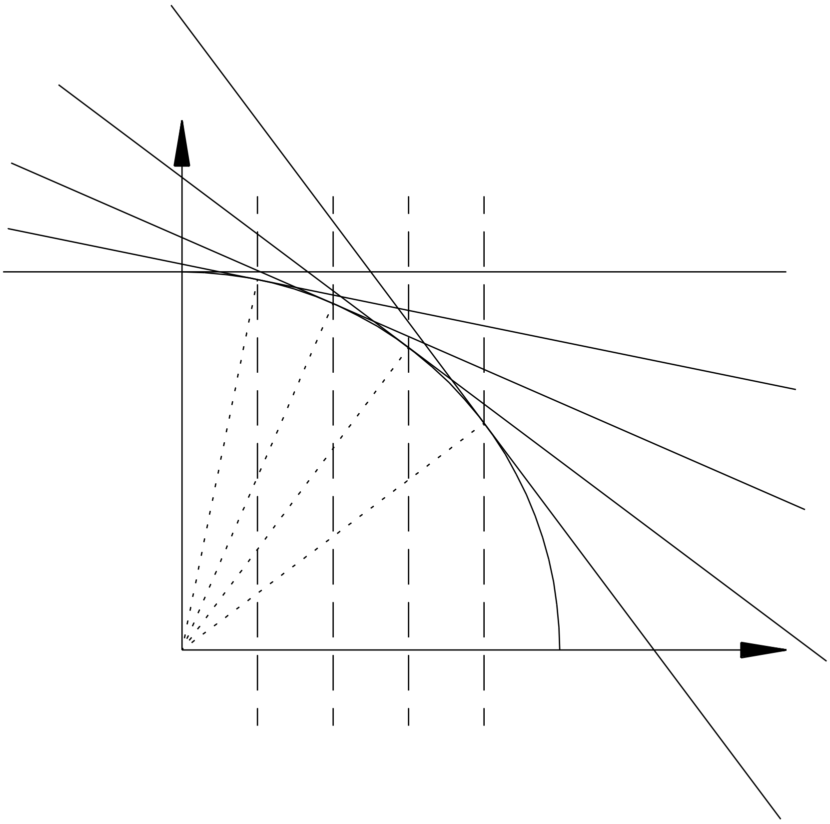
Die Ursprungsgerade hat die Steigung des Mondfahrzeugs, nämlich m = 0,4 = 40% . Verschiebt man diese so, dass sie den Krater berührt (dies ist im Punkt (2 / 0,4) der Fall !), so erkennt man, dass ihre Steigung geringer ist als die Steigung des Kraterrandes. Genauere Berechnungen liefern eine Steigung von ca. 70,7% !



Übungen zur Tangentenbestimmung

1) Zeichne einen Viertelkreis mit r = 5cm in ein x-y-Koordinatensystem. Konstruiere in den Kreispunkten mit x = 0, x = 1, x = 2, x = 3, x = 4 jeweils die Tangente an den Kreis und bestimme ihre Steigung exakt.

Lösung:



Tangente t1: m1 = 0 (waagerecht)

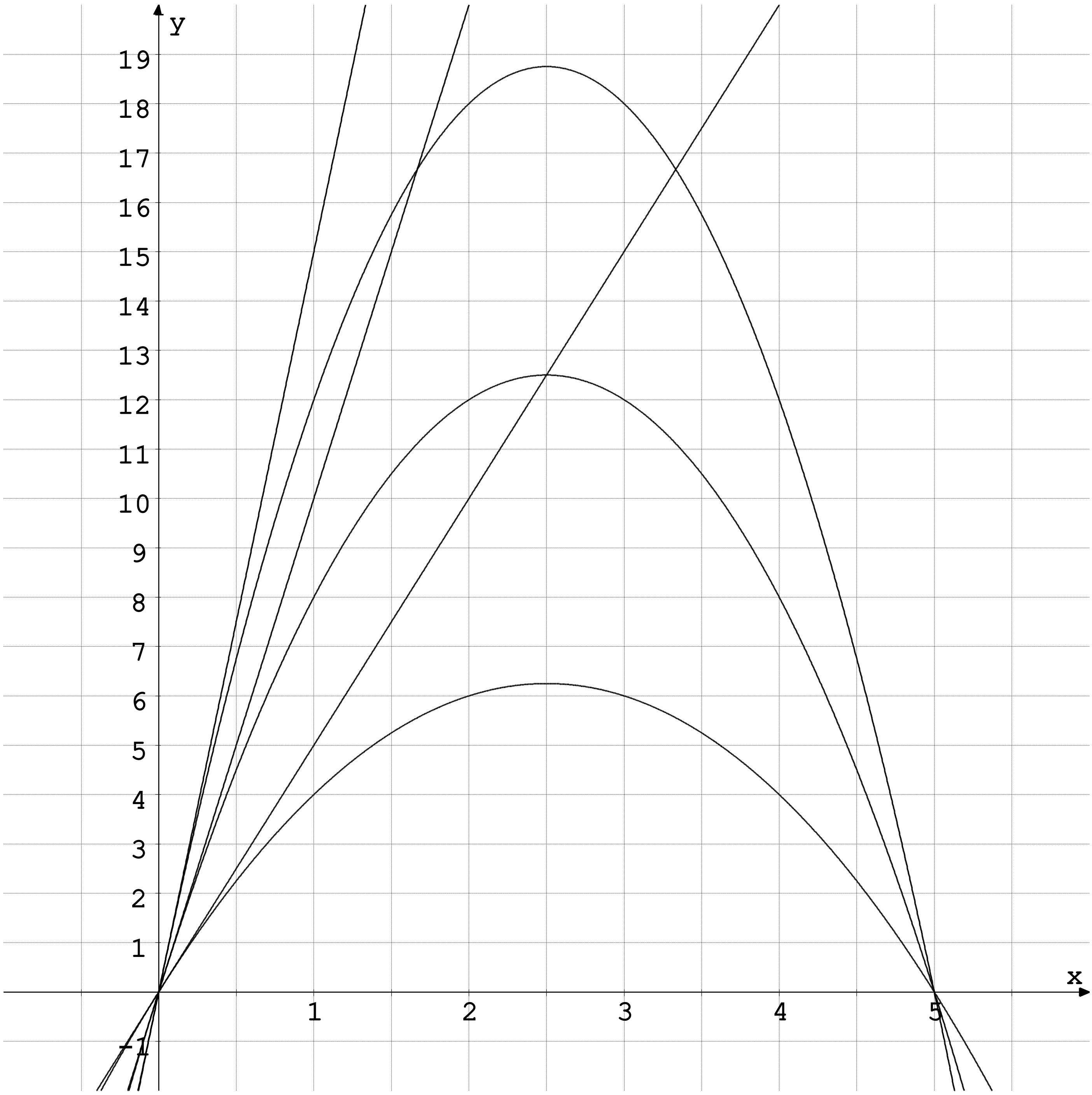
Tangente t2: Die Normale hat die Steigung $\frac{\sqrt{25-1}}{1} = \sqrt{24}$. Dann hat t2 die Steigung m2 = $-\frac{1}{\sqrt{24}} \approx -0{,}2$.

Tangente t3: Die Normale hat die Steigung $\frac{\sqrt{25-4}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{2}$. Dann hat t3 die Steigung m3 = $-\frac{2}{\sqrt{21}} \approx -0{,}44$.

Tangente t4: Die Normale hat die Steigung $\frac{\sqrt{25-9}}{3} = \frac{4}{3}$. Dann hat t4 die Steigung m4 = $-\frac{3}{4} = -0{,}75$.

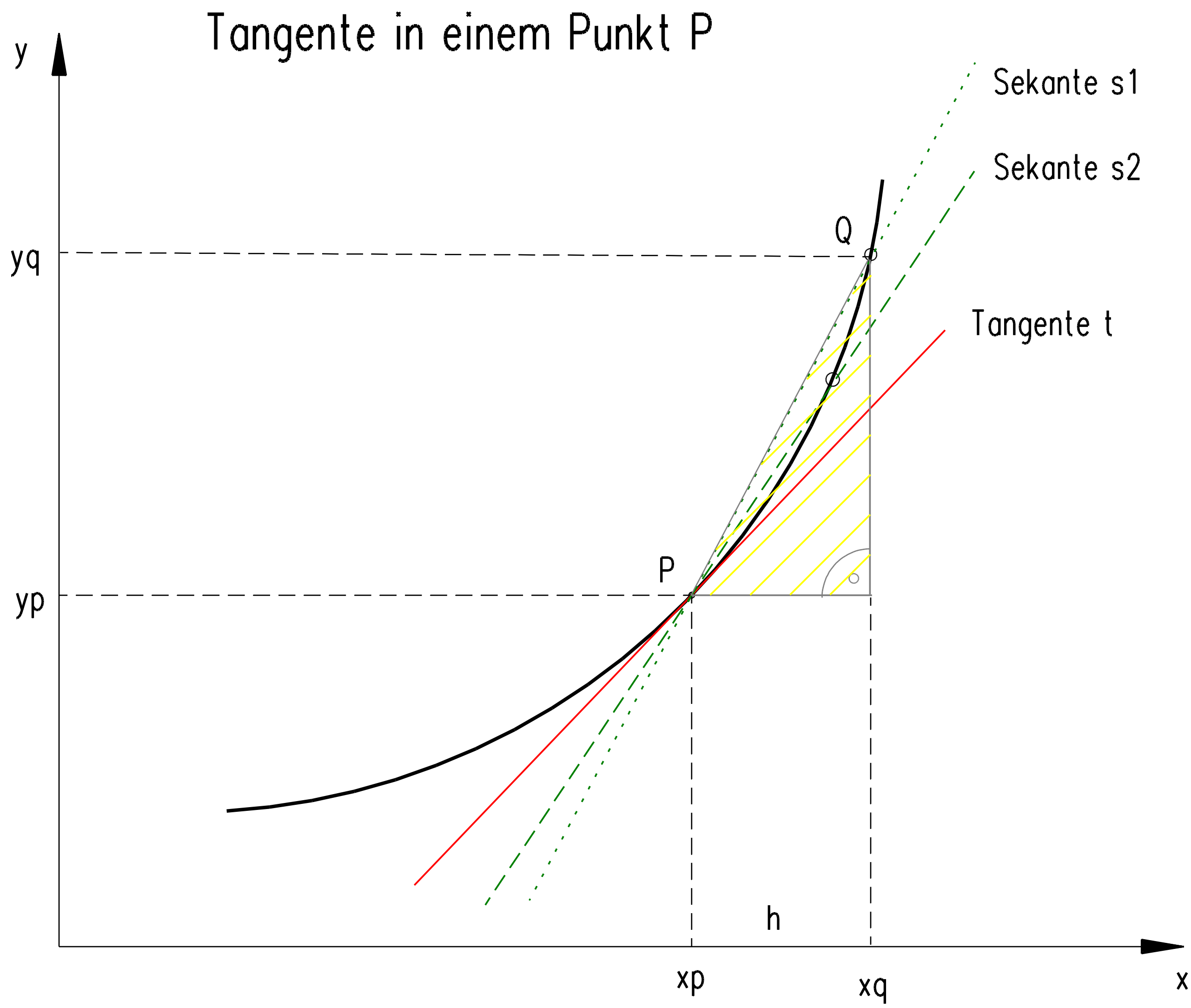
Tangente t5: Die Normale hat die Steigung $\frac{\sqrt{25-16}}{4} = \frac{3}{4}$. Dann hat t5 die Steigung m5 = $-\frac{4}{3} \approx -1{,}33$.

2) Zeichne die Graphen von $f(x) = x(5-x)$ $g(x) = 2x(5-x)$ $h(x) = 3x(5-x)$ sowie die zugehörigen Tangenten durch den Ursprung. Bestimme deren Steigung.



Man kann leicht ablesen, dass die Steigungen im Ursprung $m_1 = 5$, $m_2 = 10$, $m_3 = 15$ betragen.
Dies lässt sich auch rechnerisch herleiten.

Die Ableitung grafisch und rechnerisch



Gegeben sei eine Funktion f und ein Punkt $P(x_p/y_p)$ auf dem Grafen von f .
Gesucht ist die Tangente t an den Grafen von f im Punkt P .

Vorgehensweise:

Wir zeichnen Sekanten durch P und durch "in der Nähe von P liegende" Kurvenpunkte $Q(x_q/y_q)$ bzw. $Q(x_p+h/f(x_p+h)$. Die Tangente t wird zunächst intuitiv gezeichnet !
Diese Sekanten s kommen der Tangente t umso näher, je kleiner h gewählt wird (vgl. Skizze) . Das Steigungsdreieck dient als Hilfe für die folgenden Berechnungen.
Beachte, dass $x_q = x_p + h$ und daher $h = x_q - x_p$ gilt .

Beispiel:

$f(x) = x^2$; $x_p = 1$; $h = 0,5$. Es ist also $x_q = x_p + h = 1 + 0,5 = 1,5$

Da die Steigung m_S einer jeden Sekante von h abhängt, nennen wir diese $m_S(h)$, gesprochen: m_S von h.

Wir erhalten für die Steigung $m_S(h)$ (für h = 0,5) der entsprechenden Sekante s:

$$m_S(0,5) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{f(x_q) - f(x_p)}{h} = \frac{f(1,5) - f(1)}{0,5} = \frac{1,5^2 - 1^2}{0,5} = 2,5$$

Ergebnis: Die betreffende Sekante besitzt die Steigung 2,5 .
Berechne auch die Steigungen für h = 0,1 und h = 0,01 . Was stellst du fest ??

Das obige Beispiel lässt sich verallgemeinern:

Wir verwenden zuerst ein allgemeines h.
Dann folgt mit $f(x) = x^2$ und $x_p = 1$: $f(1) = 1^2$ sowie $f(1+h) = (1+h)^2$:

$$m_S(h) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{f(x_q) - f(x_p)}{h} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} =$$
$$\frac{1^2 + 2h + h^2 - 1^2}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h \text{ (gekürzt !)}$$

Lässt man nun h gegen 0 streben (grafisch bedeutet dies, dass die Sekanten auf die Tangente zuwandern), so ergibt sich der Wert 2+0 = 2 als Grenzwert, d.h. als Wert für die Tangentensteigung .

Hinweis: Die Tangentensteigung m_t wird auch als **Ableitung f '** von f an der Stelle x_p bezeichnet !

Man schreibt: $$\boxed{f'(x_p) = m_t = \lim_{n \to \infty} m_S(h)}$$

Gelesen wird das so:
„f Strich von x_p gleich m_t gleich Limes von m_S von h für h gegen Unendlich" .

f ' hatte bei diesem Beispiel den Wert 2 , also f '(1) = 2 .

Falls man für x_p keinen festen Wert wie 1, sondern eine Variable x setzt, so kann man eine ähnliche Berechnung für m_t bzw. f '(x) durchführen wie oben.

Dann ist $m_S(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

Man erhält als Ergebnis für dieses Beispiel $f(x) = x^2$: f '(x) = 2x
Somit ist 2x die Ableitung von x^2 :

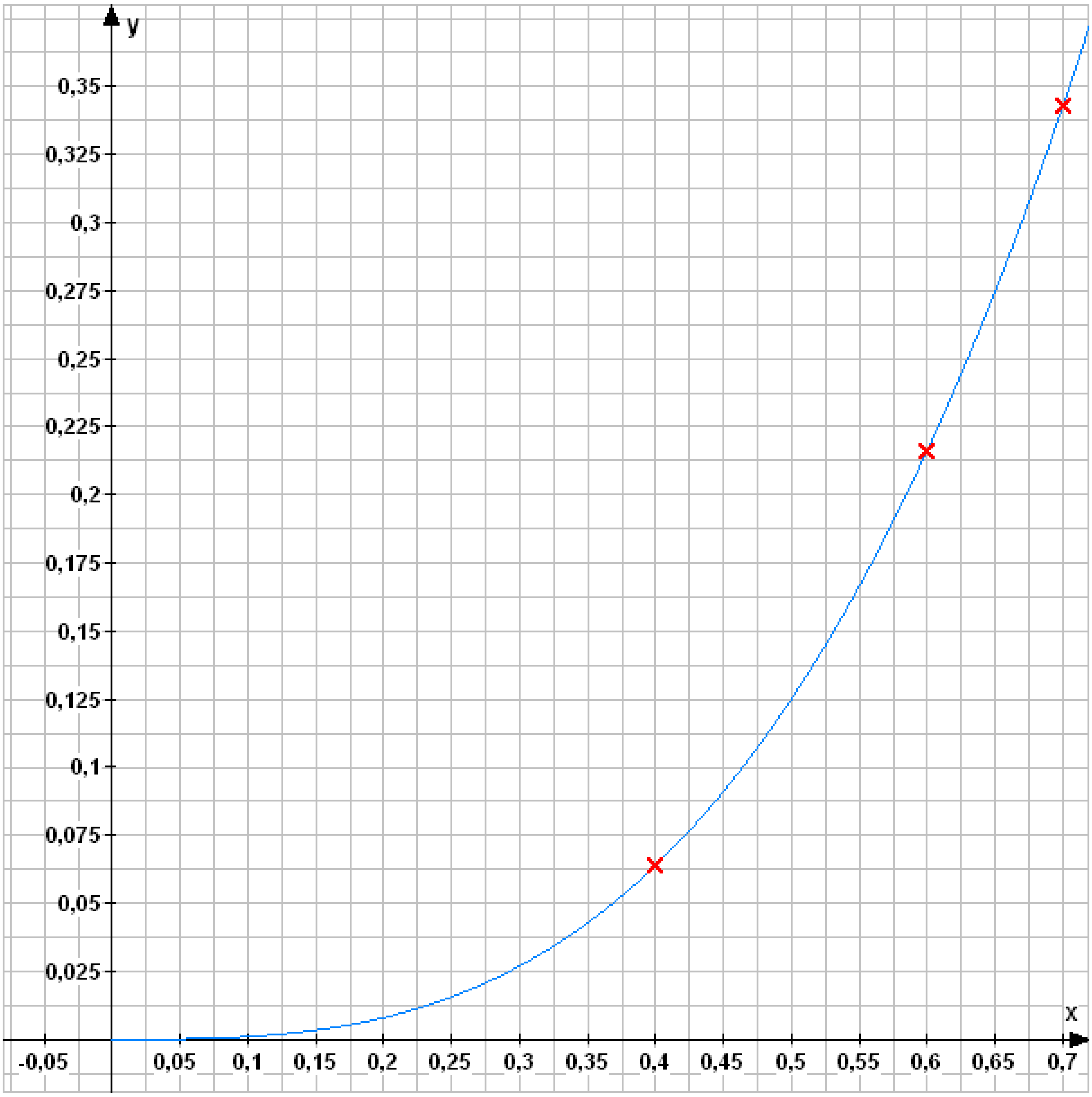
Nach diesem Prinzip kann man eine ganze Reihe von Ableitungen bestimmen.
Für trigonometrische und andere spezielle Funktionen ist die Grenzwertbestimmung aber sehr schwierig.
Die Ableitungen der gängigen Funktionen sind in Tabellen aufgelistet.

Hier einige Beispiele :

f (x)	k (Konstante)	x	x^2	x^3	x^n	sin(x)	cos(x)
f '(x)	0	1	2x	$3x^2$	$n \cdot x^{n-1}$	cos(x)	-sin(x)

Tangentensteigung grafisch / rechnerisch bestimmen mithilfe von Sekanten

Beispiel: Graph der Funktion f mit $f(x)=x^3$; Stelle a = 0,4
In der folgenden Grafik soll die Tangentensteigung m_t **für P(0,4 / 0,064)** exakt ermittelt werden.
Ziel ist es, die Tangente an den Punkt P anlegen (zeichnen) zu können !



Aufgaben:

1) Beschrifte die Punkte P(unteres Kreuz), Q_1(oberes Kreuz) und Q_2 (mittleres Kreuz).
Zeichne dann die Sekanten $s_1=(PQ_1)$ und $s_2=(PQ_2)$ ein und berechne ihre Steigungen ms_1, ms_2 exakt.

2) Denke dir eine Sekante durch P und $Q_3(0,45 / y)$ gezeichnet. Berechne auch deren Steigung ms_3 exakt.
Verfahre ebenso mit $Q_4(0,35 / y)$.

3) Stelle den allgemeinen Term für $m_S(h)$ auf für einen beliebigen auf P „zuwandernden“ Punkt Q.
Vereinfache diesen Term soweit wie möglich. Was gilt für $h \to 0$? ($\to$ bedeutet: „strebt gegen“).
Zeichne anschließend die Tangente (farbig) ein .

4) Bestimme nun die <u>Funktionsgleichung</u> t(x) der ermittelten Tangente an P exakt !

5) Ermittle t(x) mithilfe des TI83 . Graph zeichnen lassen und dann das Draw-Menü aufrufen und Tangent(wählen. Stelle 0,4 eintippen. Tangentengleichung wird dann angezeigt (approximativ !).