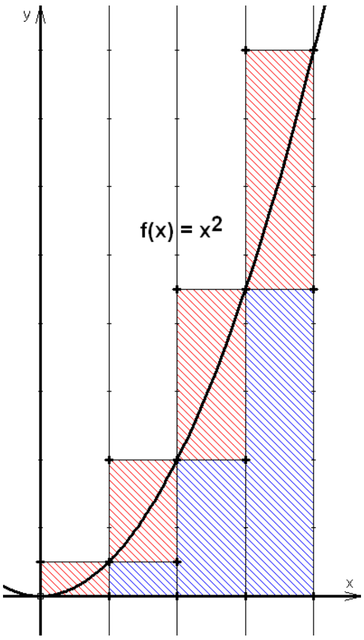
Flächeninhaltsfunktion bei einer Parabel – Der Weg zur Stammfunktion **Ac**

Die Flächeninhaltsfunktion $A_o(x)$ zu $f(x) = x^2$ soll hergeleitet werden. $A_o(x)$ sei so definiert, dass sie zu jedem x-Wert den Flächeninhalt zwischen G_f und x-Achse in [0;x] angibt !

> Wir approximieren $A_o(x)$ durch Rechtecksflächen, wobei zunächst senkrecht zur x-Achse n Streifen gezeichnet werden. Diejenigen Rechtecksflächen, die von der x-Achse und G_f eingeschlossen werden, heißen Untersummen U_n , während die von der x-Achse ausgehenden und den Graphen umschließenden Flächen als Obersummen O_n bezeichnet werden.

1. Schritt (Vorübung): Approximation im Intervall [0;2] mit Streifenzerlegung n = 4 bzw. n = 10



Ergänze die Grafik um die zu den Rechtecken gehörenden x- und y-Koordinaten und berechne dann die Untersumme U_4 (Summe der unter dem Grafen liegenden Rechtecksflächeninhalte) und O_4 (Summe aller vorkommenden Rechtecksflächeninhalte).

U_4 =

O_4 =

Rechne anschließend auch mit der Streifenzerlegung n = 10 (ohne neue Zeichnung):

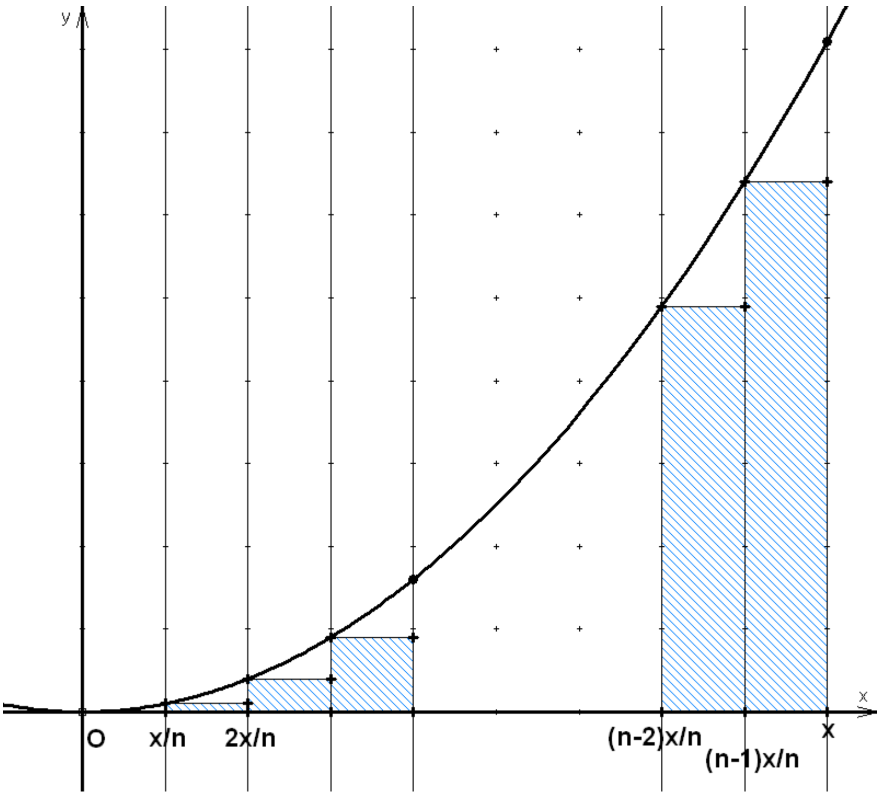
U_{10} =

O_{10} =

U_{1000} = ?? Verwende hierfür die TI83-Funktionen sum und seq !

Syntax von seq (bildet eine Folge bzw. Liste von Zahlen):
seq(Funktion, Variable, Startwert, Endwert, Schrittweite)

2. Schritt (Verallgemeinerung): Approximation im Intervall [0;x] mit allgemeiner Zerlegung n .



Wir berechnen zunächst nur die Untersumme U_n !

1) Ergänze die nicht maßstäbliche Grafik um die zu den Rechtecken gehörenden x- und y-Koordinaten. Beachte dabei, dass jeder Streifen die Breite $\frac{x}{n}$ bzw. x/n besitzt.

2) Stelle dann einen Term auf für die Untersumme und vereinfache diesen gegebenenfalls :

U_n =

Wie lässt sich dieser Term weiterverarbeiten ?

Lösungen:

Zum 1.Schritt:

$U_4 = 0{,}5(0{,}5^2 + 1^2 + 1{,}5^2) = 1{,}75$ $O_4 = 0{,}5(0{,}5^2 + 1^2 + 1{,}5^2 + 2^2) = 3{,}75$

$U_{10} = 0{,}2(0{,}2^2 + 0{,}4^2 + \ldots + 1{,}6^2 + 1{,}8^2) = 2{,}28$ TI83: 0.2*sum(seq(X^2,X,.2,1.8,.2))
$O_{10} = 0{,}2(0{,}2^2 + 0{,}4^2 + \ldots + 1{,}8^2 + 2^2) = 3{,}08$ TI83: 0.2*sum(seq(X^2,X,.2,2,.2))
Hinweise: sum = LIST MATH 5
seq = LIST OPS 5

Erweiterung: Berechne auch U_{1000} mittels 0.002*sum(seq(X^2,X,.002,1.998,.002))
Ergebnis: $U_{1000} \approx 2{,}662668$

Vermutung für $A_0(2)$??

Zum 2.Schritt:

$$U_n = \frac{x}{n} \cdot [(1\frac{x}{n})^2 + (2\frac{x}{n})^2 + (3\frac{x}{n})^2 + \ldots + ((n-2)\frac{x}{n})^2 + ((n-1)\frac{x}{n})^2]$$

Dieser Term lässt sich umformen zu :

$$U_n = \frac{x^3}{n^3} \cdot [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2]$$

Für die in eckigen Klammern stehende Summe gibt es eine Kurzschreibweise (vgl. Formelsammlung !):

Es gilt nämlich $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Da unsere Summe aber nur bis (n-1) läuft, muss ich auf der rechten Seite der Formel n durch n-1 ersetzen:

Also $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2 = \dfrac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} = \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

Für die Untersumme ergibt sich dann :

$$U_n = \frac{x^3}{n^3} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = x^3 \, \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

Aufgabe: Zeige mittels einer Tabelle (TI83 verwenden) oder durch allgemeine Rechnung, dass der Bruchterm den Grenzwert $\frac{2}{6}$, $also\ \frac{1}{3}$ besitzt, wenn $n \to \infty$ strebt .

Ergebnis: Für $n \to \infty$ strebt die Untersumme U_n gegen den Term $\frac{1}{3}x^3$.

Die Ableitung des Terms ist aber genau $3 \cdot \frac{1}{3} x^{3-1} = x^2$. Dies spricht wiederum für einen Zusammenhang zwischen Flächeninhaltsfunktion und Ableitung, nämlich **$A_0(x)' = f(x)$** .