Komplexes Einstiegsbeispiel:

Gegeben sei die ganzrationale Funktionenschar $f_t(x) = t^2x^3 - 6tx^2 + 9x \;\; ; \;\; t > 0$.

a) Zeichne zunächst einige Repräsentanten der Schar (konkret für $t = 1 ; 1{,}5 ; 2 ; 2{,}5 ; 3$) und zeichne die Hoch- sowie die Tiefpunkte ein .

Hinweis: Beim TI84 gibt man Funktionenscharen am besten mithilfe einer Liste ein.
- zunächst den Term im Y= - Editor definieren (hierbei t jeweils durch L_1 ersetzen !)
- im STAT-Menü in der Liste L_1 die Werte eingeben, hier: 1; 1.5 ; 2 ; 2.5 ; 3 .
- Sinnvolles WINDOW wählen, welches von allen 6 Graphen gefüllt wird .

Berechne nun die Nullstellen sowie die Hoch- und Tiefpunkte jeweils in Abhängigkeit von t .

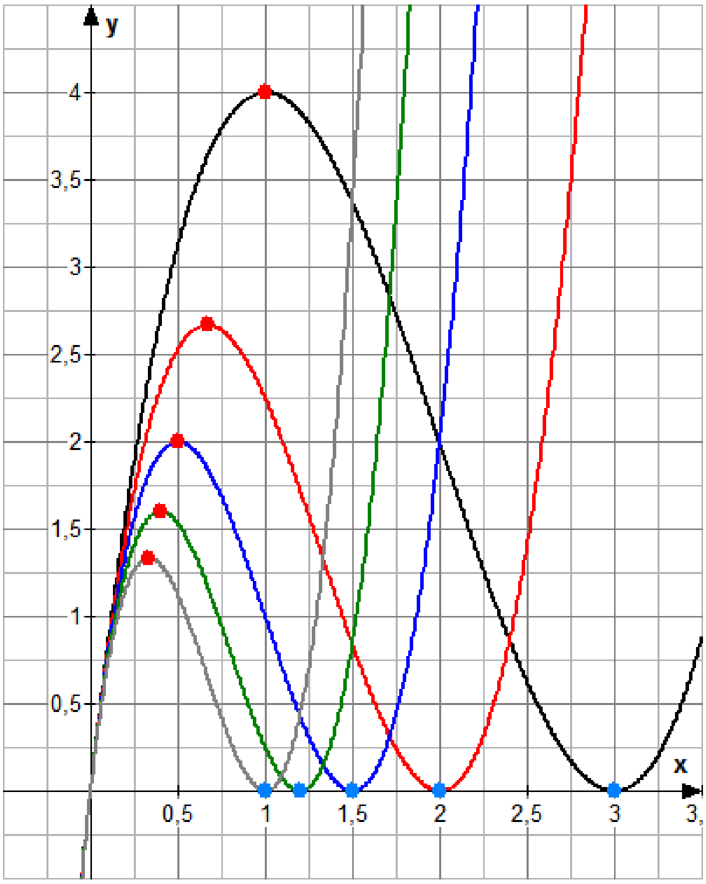
b) Finde graphisch und rechnerisch die Ortskurven der Extrempunkte.

c) Eine Erweiterung mit Integralrechnung:

Für welches t ist die Fläche zwischen dem Graphen von f_t und der x-Achse genau 6 Flächeneinheiten (FE) groß ?

Lösungen:

a) Graphen mit Hochpunkten und Tiefpunkten:



Nullstellen:

$t^2x^3-6tx^2+9x = 0 \Leftrightarrow x^3-\frac{6}{t}x^2+\frac{9}{t^2}x = 0$

$\Leftrightarrow$ x=0 oder $x^2-\frac{6}{t}x+\frac{9}{t^2} = 0$

Mit der p-q-Formel folgt $x=\frac{3}{t}$.

Nullstellen also : $x=0 \vee x=\frac{3}{t}$

Ableitungen und Extrema:

$f_t'(x) = 3t^2x^2-12tx+9$
$f_t''(x) = 6t^2x-12t$

$f_t'(x) = 0$ führt auf die quadratische Gleichung $3t^2x^2-12tx+9=0$ mit den Lösungen $x = \frac{1}{t}$ und $x = \frac{3}{t}$.

Dies sind die Extremstellen, was nachfolgend mittels f'' bewiesen wird :

$f_t''(\frac{1}{t}) = 6t^2\frac{1}{t}-12t = 6t-12t = -6t < 0$, weil immer $t > 0$ gilt .

Wir schließen auf einen relativen Hochpunkt $H_t(\frac{1}{t}/\frac{4}{t})$.

Ebenso leitet man her : $T_t(\frac{3}{t}/0)$

b) Ortskurven:

Anhand der Grafik kann man vermuten, dass die Tiefpunkte auf der x-Achse und die Hochpunkte auf einer Ursprungsgeraden liegen . Welche Gleichungen haben diese Geraden ??

Rechnerische Herleitung der Ortskurvengleichungen:

Für H_t ist $x=\frac{1}{t}$ und $y=\frac{4}{t}$.
Man sieht, dass y das 4-fache von x ist, also ist die Ortskurvengleichung für die HPs: $y = 4x$

Ebenso erhält man für $T_t(\frac{3}{t}/0)$ die Ortskurve: $y = 0$

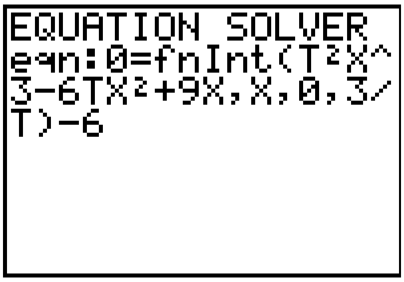
c) <u>Flächeninhalt:</u>

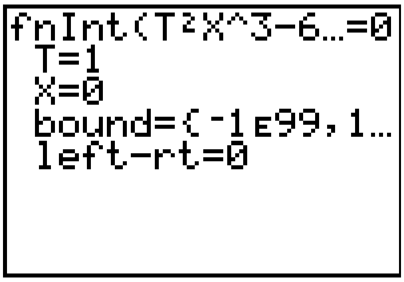
Ansatz: $\int_0^{\frac{3}{t}} (t^2x^3 - 6tx^2 + 9x)dx = 6$. Es folgen nun exakte Umformungen:

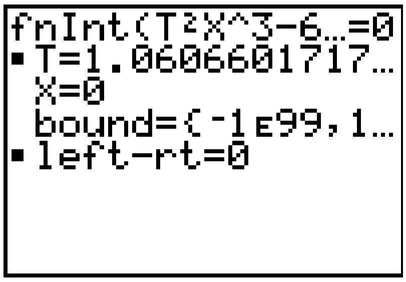
$$\left[\frac{t^2}{4}x^4 - 2tx^3 + 4{,}5x^2 \right]_0^{\frac{3}{t}} = 6 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{t^2}{4}\left(\frac{3}{t}\right)^4 - 2t\left(\frac{3}{t}\right)^3 + 4{,}5\left(\frac{3}{t}\right)^2 = 6 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{20{,}25}{t^2} - \frac{54}{t^2} + \frac{40{,}5}{t^2} = 6$$

$$\Leftrightarrow\quad 20{,}25 - 54 + 40{,}5 = 6t^2 \quad\Leftrightarrow\quad 6{,}75 = 6t^2 \quad\Leftrightarrow\quad 1{,}125 = t^2 \qquad t = \sqrt{1{,}125} \approx 1{,}06$$

Manchmal genügt auch eine **<u>approximative</u>** Lösung mithilfe des SOLVERS (TI83):







<u>Wichtig:</u> **<u>Vor</u>** Drücken der SOLVE-Taste muss der Cursor <u>auf</u> der 1 hinter „T=“ stehen !!

<u>Weitere Aufgabe:</u>

Bestimme alle Hoch- und Tiefpunkte der Schar mit $f_k(x) = x^3 - 3kx^2$; $k>0$.
Bestimme auch die Gleichung der Ortskurve, auf der alle **<u>Tiefpunkte</u>** von f_k liegen.

<u>Lösung:</u>

$f_k'(x) = 3x^2-6kx$ $\qquad f_k''(x) = 6x-6k$

$f_k'(x) = 0$ führt auf $3x^2-6kx=0$ mit den Lösungen $x = 0$ und $x = 2k$.

Wegen $f_k''(0) = -6k<0$ für $k>0$ liegen an der Stelle $x=0$ für alle $k>0$ Hochpunkte $H_k(0/0)$.
Wegen $f_k''(2k) = +6k>0$ für $k>0$ liegen an der Stelle $x=2k$ für alle $k>0$ Tiefpunkte $T_k(2k/-4k^3)$.

Für die Ortskurve der Tiefpunkte ergibt sich $\quad y = -0{,}5x^3$