Der Integralbegriff im Überblick

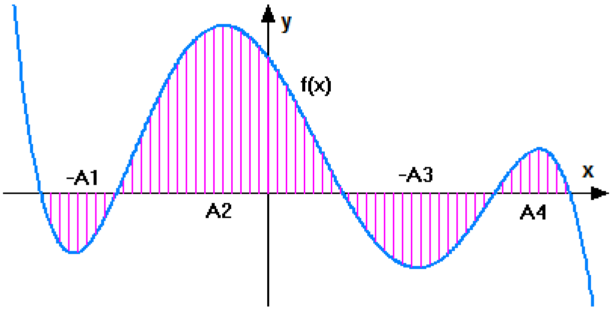
Definition:

Das Integral ist die Summe aller orientierten Flächeninhalte zwischen G_f (Graph von f) und x-Achse in einem gegebenen Intervall [a;b].

Man schreibt $\int_a^b f(x)dx$

und liest „Integral von a bis b über f (x) dx"

„Orientiert" bedeutet, dass alle unterhalb der x-Achse gelegenen Flächen ein negatives Vorzeichen erhalten (Begründung s. unten).



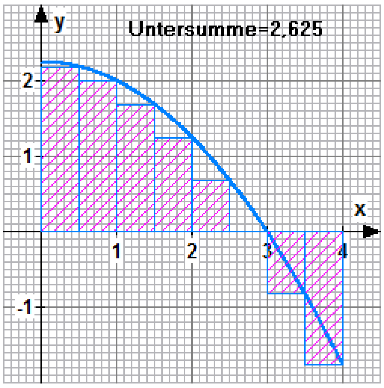
Es gilt hier: $\int_a^b f(x)dx$ = -A1+A2-A3+A4

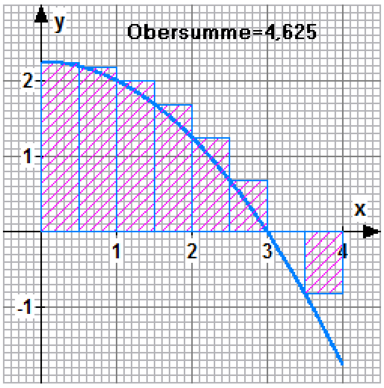
Beachte: Für die schraffierte **Fläche** gilt A=A1+A2+A3+A4

1) Approximative Verfahren:

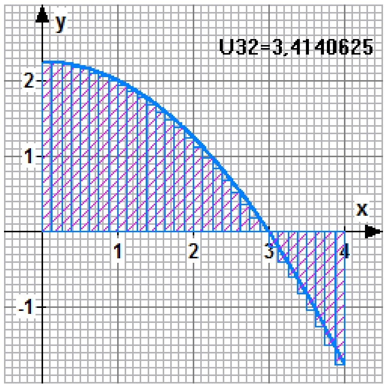
① Die einfachste Methode der Approximation besteht darin, das Intervall [a;b] in n Segmente einzuteilen und das Integral durch Rechtecksflächen anzunähern (**Untersummen U_n und Obersummen O_n**) . n kann dann schrittweise erhöht werden, so dass sich beide Summen dem wahren Integral immer mehr annähern (Integral als Grenzwert von Summen) .
Jede Rechtecksfläche wird mit Breite mal Höhe berechnet, wobei man aus praktischen Gründen (Formelautomatik) für die Höhe den Funktionswert von f an der betreffenden Stelle nimmt. Dadurch entstehen zwangsläufig auch negative Produkte, weil es auch negative Funktionswerte geben kann. Einige Flächen erhalten so ein negatives Vorzeichen (s.Beispiel unten).

Beispiel: **$f(x) = 2,25 - 0,25x^2$** im Intervall **[0;4]**. Einteilung in 8 Streifen, Rechtecksbreite also $\Delta x=0,5$. (Δ = „Delta")





Zum Vergleich ist rechts eine Zerlegung in 32 Streifen mit eingezeichneter Untersumme U_{32} zu sehen.
Die Verbesserung der Näherung ist deutlich.



Tipp: Mit dem **TI84** rechnet man mittels **sum** und **seq** (LIST-Menü) so: U_8 = 0.5*sum(seq(2.25-0.25X²,X,0.5,4,0.5)) O_8 = ??
Die Gesamtfläche aller Rechtecke ist hier nicht identisch mit der Untersumme U_8 bzw. der Obersumme O_8 ! Wollte man diese Gesamtfläche berechnen, so müsste man die Nullstelle (hier: x=3) ermitteln und zwei Intervalle getrennt betrachten. Die Flächen im Intervall [3;4] müssten dann ebenso positiv genommen werden wie in [0;3]. (Ergebnisse: 5,1875 bzw. 5,4375)

② GTR wie der TI84 bieten eine sehr gute Approximation mit dem Befehl **fnInt** an. Man findet fnInt im MATH-Menü.
Für obiges Beispiel tippt man ein: **fnInt**(2.25-0.25X²,X,0,4) und erhält die Näherung 3,666666667 .

2) Ein exaktes Verfahren (dieses funktioniert nicht für alle Funktionen, aber für die meisten):

Überraschender Weise hängt die Integralrechnung mit der Ableitung zusammen, und zwar lässt sich beweisen, dass das Integrieren die Umkehrung des Ableitens ist (**Integrieren = „Aufleiten"**). Die gegebene Funktion f entspricht der Ableitungsfunktion. Gesucht ist die so genannte **Stammfunktion F** (mit F'= f), mit der das Integral berechnet wird.

Es gilt folgende Beziehung: $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$ Achtung: Nicht alle Funktionen besitzen eine Stammfunktion F !

An obigem Beispiel soll die Vorgehensweise erläutert werden:

Gegeben $f(x) = 2,25 - 0,25x^2$ sowie [a;b] = [0;4] . Also ist $F(x) = 2,25x - \frac{1}{12}x^3$ eine Stammfunktion von f .

Wegen $F(4) = 3,\overline{6}$ und F(0) = 0 gilt $\int_0^4 2,25 - 0,25x^2 dx = 3,\overline{6} - 0 = 3,\overline{6}$. Dieses Ergebnis ist exakt !

Nun noch die exakte Berechnung der Gesamtfläche (Aufspalten in 2 Integrale; vgl. Hinweis oben):

$$A = \int_0^3 f(x)dx - \int_3^4 f(x)dx = F(3) - F(0) - [F(4) - F(3)] = 4,5 - 0 - [3,\overline{6} - 4,5] = 5,\overline{3}$$