Flächeninhaltsfunktion (Integralfunktion) mit dem TI83 erzeugen   Ac

Die Flächeninhaltsfunktion bzw. Integralfunktion $A_o(x)$ einer Randfunktion f(x) gibt für jedes beliebige x den exakten Flächeninhalt zwischen G_f und x-Achse im Intervall [0 ;x] an. Somit ist also $A_o(x)$ ebenfalls (wie f(x)) eine Funktion, die sich auch grafisch darstellen lässt. Ein Vergleich der Grafen von f(x) und $A_o(x)$ (bzw. der Approximation von $A_o(x)$ durch die Untersummen) soll zeigen, dass $A_o(x)$ durch Umkehrung des Ableitens, nämlich durch „Aufleiten" entsteht .
Hinweis:
Die Flächeninhaltsfunktion $A_o(x)$ entsteht als <u>Limes</u> der Untersummen bzw. Obersummen in [0;x] .
Im folgenden wollen wir uns der Einfachheit halber auf Untersummen $U(x_i)$ beschränken

Wir vereinbaren, dass $U(x_i)$ die **Summe** der Rechtecksflächeninhalte im Intervall [0 ; x_i] angibt und wählen eine Zerlegung mit n Streifen.

Dann gelten: $\Delta x = \frac{x}{n}$ und $x_i = i \cdot \Delta x = i \cdot \frac{x}{n}$

Für i = 0 ist $U(x_o) = U(0) = 0$ (denn im Intervall [0;0] existiert kein Flächeninhalt) .

Für i > 0:
Wenn f monoton <u>wachsend</u> ist, dann gilt $U(x_i) = U(x_{i-1}) + \Delta x \cdot f(x_{i-1})$ und

wenn f monoton <u>fallend</u> ist: $U(x_i) = U(x_{i-1}) + \Delta x \cdot f(x_i)$.

Das Prinzip ist daher, die i-te Untersumme auf die vorherige (nämlich (i-1)-te) zurückzuführen !

<u>**Beispiel:**</u> f(x) = cos(x) Zerlegung n = 10 Intervall $[\, 0 ; \frac{\pi}{2} \,]$

Achtung: monoton fallende Funktion; Winkelmodus RAD !

Wir berechnen $\Delta x = \frac{\pi}{20}$ und daher $x_0 = 0$ $x_1 = \frac{\pi}{20} \approx 0,157$ $x_2 = \frac{\pi}{10} \approx 0,314$ usw. und legen eine Tabelle an. Dies kann z.B. mit den Listen L_1, L_2, etc. des TI83 geschehen, wobei aber dann wegen der global wirkenden Listenoperationen der Sonderfall i = 0 leider weggelassen werden muss ! Die flexibelste Methode ist die Erstellung eines BASIC-Programms, welches keinerlei Einschränkungen unterliegt.

I	x_i	$f(x_i)$	$\Delta x \cdot f(x_i)$	$U(x_i)$
0	0	1	0,157	**0**
1	0,157	0,988	0,155	**0,155**
2	0,314	0,951	0,149	**0,305**
3	0,471	0,891	0,140	**0,445**
4	0,628	0,809	0,127	**0,572**
5	0,785	usw	usw	**Usw**
6	0,942			
7	1,100			
8	1,257			
9	1,414			
10	1,571			

Anschließend zeichnen wir manuell (im vereinbarten Intervall) die Grafen von f(x), $U(x_i)$ und sin(x) (wird als $A_o(x)$ vermutet !) in ein gemeinsames Koordinatensystem, wobei im Falle von $U(x_i)$ ein Punktdiagramm gezeichnet werden soll. Ist der vermutete Zusammenhang zu erkennen ?

Für die halb-automatische Berechnung mit dem TI83 sind folgende Schritte erforderlich:

Unter Y= muss zunächst der Term von f(x) als Y_1 definiert werden .
Die x_i – Werte werden in der Liste L_1 des TI83 abgelegt, die U_i kommen in die Liste L_2 . Dies geschieht per BASIC-Programm .
Die Daten der Listen L_1 und L_2 werden nun manuell mittels Statplot grafisch dargestellt (Datentyp Nr.1 verwenden), wobei wegen der besseren Übersicht die Punkte als kleine Quadrate gezeichnet werden (unter Mark: auswählen) .
Der Term $A_o(x)$ für die Integralfunktion wird vermutet (f(x) aufleiten !), als Y_2 im Y= -Editor definiert und zusammen mit der Randfunktion f(x) über den Statplot gezeichnet. So kann die Vermutung grafisch überprüft werden.

BASIC-Programm (INTEGRF) zur Erzeugung der Listen für die x_i und U_i in L_1 und L_2 :
Vorsicht: Das Programm funktioniert nur korrekt für wachsende Funktionen !!

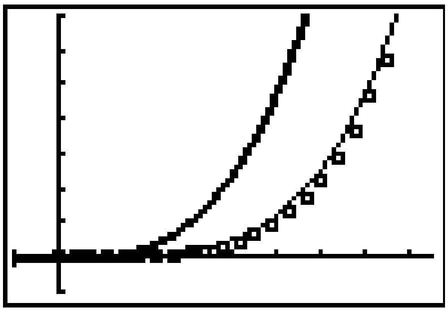
ClrHome **Prompt B : Prompt N** **B/N→D** **1+N→Dim(L₁):1+N→Dim(L₂)** **0→X : 0→U** **X→L₁(1) : U→L₂(1)**	**For(I,1,N)** **U+D*Y₁(X)→U** **I*D→X** **X→L₁(I+1)** **U→L₂(I+1)** **End**

Alternative für <u>nicht</u> monotone Funktionen (lange Rechenzeit !): **INTEGRF2**
Bei diesem Programm wird $A_o(x)$ automatisch in Y_2 gespeichert mittels fnInt(Y_1,X,0,X)

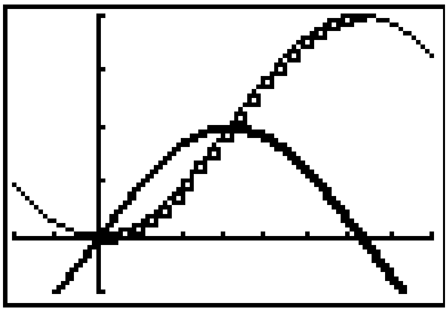
ClrHome **Input "F(X)=",Y₁** **"fnInt(Y₁,X,0,X)" → Y₂** **Prompt B** **Prompt N** **B/N→D** **1+N→Dim(L₁):1+N→Dim(L₂)** **0→X : 0→U** **X→L₁(1) : U→L₂(1)**	**For(I,1,N)** **U+D*Y₁(fMin(Y₁,Z,(I-1)D,I*D))→U** **I*D→X** **X→L₁(I+1)** **U→L₂(I+1)** **End** **<u>Bemerkung:</u> Der Term für Y₁ muss in Anführungszeichen eingetippt werden !**

Beispiele:

$f(x) = x^3$ b = 1,5 und n = 20
$A_0(x) = x^4/4$, als Y_2 definieren
WINDOW x[-0.2;1.7] y[-0.2;1.4] scale 0.2



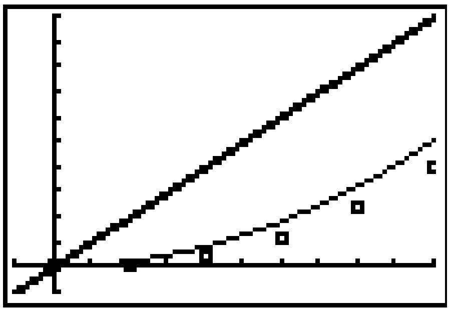
$f(x) = \sin(x)$ $b = \pi$ und n = 20 .
$A_0(x) = 1 - \cos(x)$, weil hier $A_0(0) = 0$ gelten muss (siehe Fläche unter f!)
WINDOW x[-1;4] y[-0.5;2] scale 0.5



Weitere Beispiele:

Für f(x) = x erhalten wir folgendes:

f(x) = x , als Y_1 definieren. Außerdem den Linienstil „fett“ für Y_1 wählen . b = 1 und n = 5 eingeben .
$A_0(x) = x^2/2$, als Y_2 definieren
WINDOW x[-0.1;1] y[-0.1;1] scale 0.1



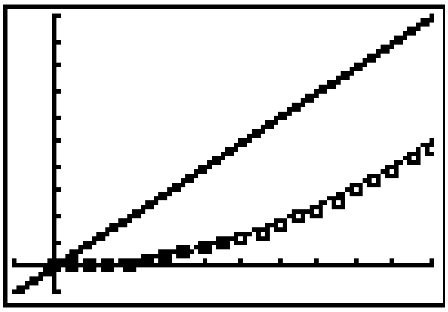
Sehen wir uns unter STAT EDIT die Tabellen an, so sehen wir folgendes :

L1	L2	L3 1
0	0	------
.2	0	
.4	.04	
.6	.12	
.8	.24	
1	.4	
------	------	

L1(1)=0

Es fällt auf, dass die Approximation sehr grob ist, was aber angesichts des kleinen n-Wertes nicht verwundert. Wir approximieren daher zum Vergleich noch mit n = 20 :

Eingaben wie oben, aber jetzt n = 20 verwenden.



L1	L2	L3 1
0	0	------
.05	0	
.1	.0025	
.15	.0075	
.2	.015	
.25	.025	
.3	.0375	

L1(1)=0

<u>Achtung:</u> Listen nicht vollständig sichtbar !

Anmerkung: Mit **fnInt(Y1,X,(a),X)** lässt sich ebenfalls eine Integralfunktionvon f erzeugen !!

Aufgaben: Experimentiere mit $f(x) = 2 + x^2$ und $f(x) = 0{,}2x^4 - x^2$; je $x \in [0; 2]$
Weitere Beispiele ?