Untersuchung der Krümmungsfunktionen zu den Trassierungsfunktionen

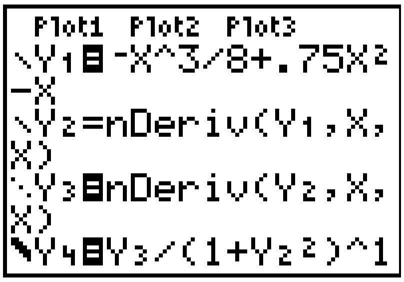
$f_1(x) = -x^3/8 + 0{,}75x^2 - x$ und $f_2(x) = 3/32x^5 - 9/16x^4 + x^3 - x$

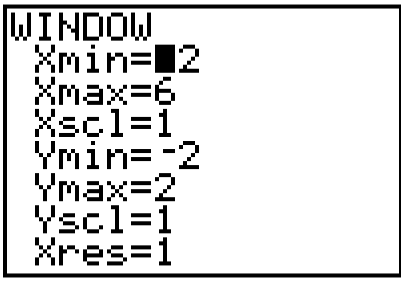
<u>Es gelten die Formeln:</u>

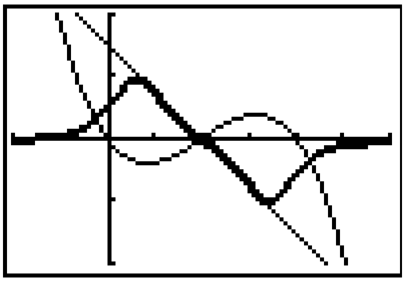
$K(x) = \dfrac{f''(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}^{\,3}}$	Krümmungsfunktion
$r = \left\lvert \dfrac{1}{K(x_o)} \right\rvert$	Krümmungskreisradius an der Stelle x_o
$(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2 = r^2$	Allgemeine Kreisgleichung

wobei $y_m = f(x_o) + \dfrac{(1+f'(x_o)^2)}{f''(x_o)}$ und $x_m = x_o - \dfrac{(1+f'(x_o)^2)\cdot f'(x_o)}{f''(x_o)}$

Wir betrachten zunächst $\mathbf{f_1(x)}$ und bilden f_1', f_1'' und K .
Interessant ist für jede Funktion f der Zusammenhang zwischen f und f '' sowie f und K . Daher werden jetzt die Graphen von f_1, f_1'' (dünne Linie) und K (dicke Linie) gemeinsam dargestellt .

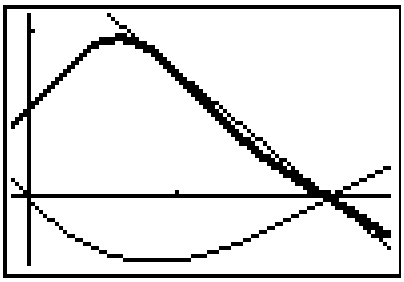




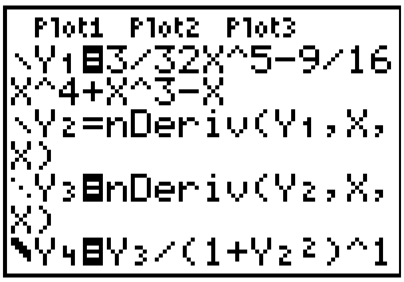


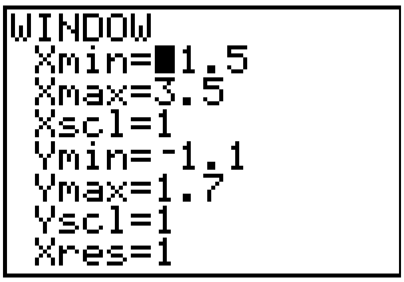
Man erkennt folgendes (die Funktion wird der Einfachheit halber mit f bezeichnet):

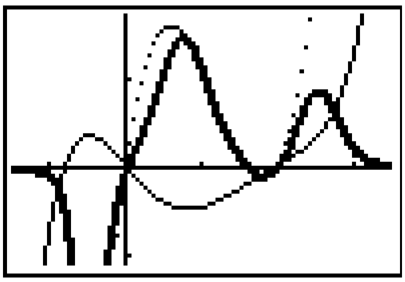
Wenn die Krümmung K = 0 ist, dann ist auch f ''= 0 .
f hat an der betreffenden Stelle einen Wendepunkt . Dies lässt sich anhand der Formeln auch leicht überprüfen. Wie ?
Das Vorzeichen von f '' stimmt mit dem von K überein.
Ist K > 0, so besitzt f eine Linkskrümmung, andernfalls eine Rechtskrümmung .
Hat f an der Stelle a ein Extremum, so gilt dort f ''(a) = K(a) .
Auch dies kann mit den obigen Formeln überprüft werden.
Die Grafik rechts zeigt dies deutlicher für den TP von f .



Anschließend noch die Darstellungen für $\mathbf{f_2(x)}$:







Anmerkung:

Wenn f an der Stelle a einen Wendepunkt hat, dann existiert an dieser Stelle kein Krümmungskreis. Dies ist deswegen so, weil aus der notwendigen Bedingung für Wendepunkte (f ''(a) = 0) sofort K(a) = 0 folgt. Der Krümmungskreisradius r berechnet sich als Kehrwert der Krümmung und ist daher an einer Wendestelle unendlich groß. Geometrisch bedeutet dies, dass der Krümmungskreis zu einer Geraden „entartet“ .

Die Krümmungskreise lassen sich nach den oben angegebenen Formeln für r, x_m und y_m berechnen.
Anschließend kann man mit der Circle-Funktion des TI83 (zu finden unter DRAW 9) die Kreise einzeichnen lassen .
Die Syntax lautet **Circle(xm , ym , r) .**

Beispiel:

Für den Tiefpunkt von f_1 gilt $T(2-\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 0{,}8453 \;/\; -\frac{2}{9}\sqrt{3} \approx -0{,}3849)$

Da f ' im Tiefpunkt = 0 sein muss, gilt K(xo) = f ''(xo) und somit $r = \frac{1}{f''(x_o)} = \frac{1}{1{,}5 - 0{,}75x_o}$

Wegen $x_o = 2-\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 0{,}8453$ errechnet man $r = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1{,}1547$.

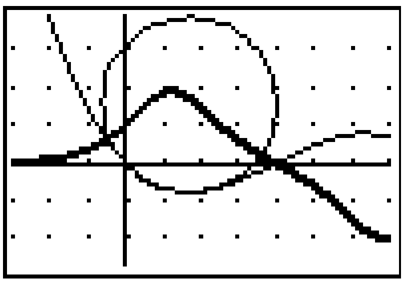
Für die 2.Ableitung gilt dann f''(xo) = 1/r = $0{,}5\sqrt{3} \approx 0{,}866$.

Außerdem ist $y_m = f(x_o) + r \approx 0{,}7698$ und $x_m =$ xo $= 2-\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 0{,}8453$

Der Circle – Befehl lautet hier also: **Circle (0.8453 , 0.7698 , 1.1547)**

Grafik mit G_f und Krümmungskreis des TPs:

(ZOOM = 5:ZSquare sowie XScl = 0.5
YScl = 0.5 gewählt !):



Die KarloPlot – Grafik ist wesentlich detaillierter: