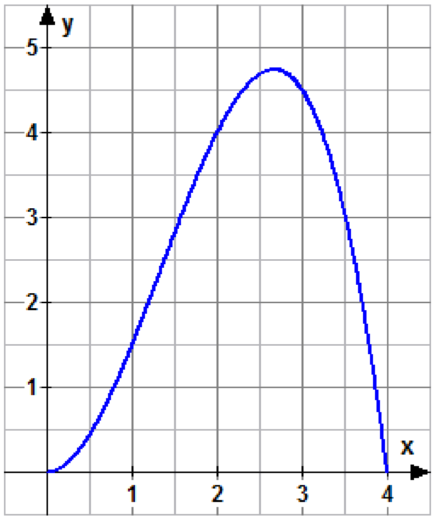
Mittelwert μ einer Funktion f in einem Intervall [a;b]

Beispiel: $f(x) = 2x^2 - 0{,}5x^3$; Intervall [0;4]. Gesucht ist der Mittelwert μ aller Funktionswerte.



Die Berechnung scheint sehr schwierig zu sein, denn man hat unendlich viele Funktionswerte, für die das arithmetische Mittel zu berechnen ist.

Zur Erinnerung:
Bei endlich vielen Werten muss man diese addieren und dann durch die Anzahl der Werte dividieren.
Z.B. $\mu = (2+5+3+7+3) / 5 = 4$

Aber bei „unendlich" ……

Erste Idee:
9 Funktionswerte addieren und die Summe durch 9 dividieren.

x	f(x)
0	0
0,5	0,4375
1	1,5
1,5	2,8125
2	4
2,5	4,6875
3	4,5
3,5	3,0625
4	0

Hier ergibt sich als Summe = 21 und somit als Mittelwert

$$\mu = \frac{21}{9} = 2{,}\overline{3}$$

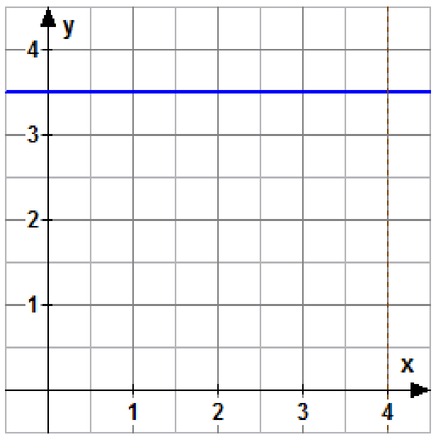
Dies ist sicherlich nur eine grobe Näherung für den gesuchten Mittelwert. Besser wird das Ergebnis bei Verwendung einer größeren Anzahl von Funktionswerten, z.B. f(0), f(0,1), f(0,2), … , f(3,9), f(4).
Mit diesen 41 Werten erhält man $\mu = 2{,}6$. Die Berechnung erledigt man z.B. mit einer Tabellenkalkulation.
Verwendet man die 401 Werte f(0), f(0,01), f(0,02), … , so erhält man $\mu = 2{,}66$.

Durch welche Rechnung erhält man einen korrekten Mittelwert μ ??

Überlegung: Angenommen, alle Funktionswerte f wären gleich.

Dann würde ein konstanter Funktionsgraph entstehen und der Mittelwert wäre gleich dem konstanten Funktionswert .

(siehe Beispiel rechts)



In diesem Beispiel ist der Mittelwert $\mu = 3{,}5$, wie leicht zu sehen ist.

Und jetzt die Idee:
Stellt man sich ein Rechteck vor, das gebildet wird aus der x-Achse, dem Funktionsgraphen und den beiden Intervallgrenzen, so erhält man den Flächeninhalt
$A=(4 - 0)\cdot 3{,}5 = 14$.

Dividiert man den Flächeninhalt durch die Intervallbreite 4, so erhält man gerade den Mittelwert μ .

Diese Idee lässt sich auf gekrümmte Graphen übertragen:

Zuerst den Flächeninhalt berechnen und dann durch die Intervallbreite dividieren !

Da im allgemeinen Fall der Flächeninhalt mit dem Integral berechnet wird, erhalten wir folgendes:

Für den **Mittelwert μ** einer Funktion f über dem Intervall [a;b] gilt:

$$\boxed{\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}}$$

Für obiges Beispiel ergibt sich dann unter Verwendung einer Stammfunktion von $f(x) = 2x^2 - 0{,}5x^3$
die exakte Lösung $\mu = 2{,}\overline{6}$. Wir sehen also, dass die dritte Näherung mit 401 Werten schon ganz gut war.

Aufgabe: Zeige, dass der Mittelwert von $f(x) = e^x$ in [0;2] den Wert $\mu=0{,}5(e^2-1)$ hat . Zeichne auch den Graphen sowie die schraffierte Fläche und die den Mittelwert darstellende waagerechte Linie.

Lösung:

$F(x)=e^x$ $\int_0^2 e^x dx = \left[e^x \right]_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1$ und somit $\mu = (e^2-1)/(2-0) = 0{,}5(e^2-1)$

Grafik: