Notwendig und Hinreichend

Ein Kriterium zur Bestimmung bzw. Untersuchung einer bestimmten Eigenschaft (z.B. „Ein Graph besitzt einen Tiefpunkt“) kann ***notwendig*** oder ***hinreichend*** oder (beides) ***notwendig und hinreichend*** sein.

Ein **notwendiges** Kriterium ist eine **unbedingte Voraussetzung** für die Existenz einer Eigenschaft !
Ist das Kriterium nicht erfüllt, dann existiert die Eigenschaft nicht .

Ein **hinreichendes** Kriterium **reicht lediglich aus**, um die Existenz einer Eigenschaft nachzuweisen, es ist aber keine unbedingte Voraussetzung ! Daher kann es vorkommen, dass eine Eigenschaft existiert, aber trotzdem ein hinr. Krit. nicht zutrifft !! Man muss dann mit einem anderen hinr. Krit. die Eigenschaft nachweisen. (Beispiel: $f(x) = x^4$ hat an der Stelle $x = 0$ einen relativen Tiefpunkt, obwohl $f''(0) = 0$ gilt ! Der Nachweis für den Tiefpunkt gelingt z.B. mit dem Vorzeichenwechselkriterium .)

Hilfreich ist stets eine Formulierung in der „WENN ... DANN ...“ – Form (diese nennt man auch „Implikation“ und symbolisiert sie mit dem „⇒“ - Zeichen) . Es gilt folgendes :

1) **Wenn** die Eigenschaft zutrifft, **dann** ist auch das notw. Krit. erfüllt .
symbolisch: Eigenschaft trifft zu ⇒ Notw. Krit. ist erfüllt

2) **Wenn** das notw. Krit. <u>nicht</u> erfüllt ist, **dann** trifft auch die Eigenschaft <u>nicht</u> zu .
symbolisch: Notw. Krit. ist nicht erfüllt ⇒ Eigenschaft trifft nicht zu

3) **Wenn** die Eigenschaft <u>nicht</u> zutrifft, **dann** ist auch jedes hinr. Krit. <u>nicht</u> erfüllt.
symbolisch: Eigenschaft trifft nicht zu ⇒ Hinr. Krit. ist(sind) nicht erfüllt

4) **Wenn** ein hinr. Krit. erfüllt ist, **dann** trifft auch die Eigenschaft zu .
symbolisch: Hinr. Krit. ist erfüllt ⇒ Eigenschaft trifft zu

<u>Achtung:</u> In allen anderen Fällen (z.B. „hinr. Krit. nicht erfüllt“) ist keine Schlussfolgerung zulässig und daher k e i n e A u s s a g e m ö g l i c h !

<u>Beispiele</u>:

Zu 1) Die Funktion f mit $f(x) = x^4$ hat an der Stelle $x = 0$ einen rel. Tiefpunkt.
Das notw. Krit. $f'(0) = 0$ ist also erfüllt ! (Nachprüfen)

Zu 2) Bei der Funktion mit $f(x) = x^2$ ist an der Stelle $x = 1$ das notw. Krit. für rel. Extremstellen (nämlich $f'(1) = 0$) nicht erfüllt. Also kann an der Stelle $x = 1$ kein rel. Extremum existieren .

Zu 3) Die Funktion mit $f(x) = x^2$ hat an der Stelle $x = 1$ kein Extremum. Die hinr. Kriterien für rel. Extremstellen (nämlich $f'(1) = 0 \wedge f''(1) \neq 0$ oder aber das Vorzeichenwechselkriterium) sind also nicht erfüllt ! (Prüfe: $f'(1) \neq 0$) .

Zu 4) Bei der Funktion mit $f(x) = x^3$ gilt: $f''(0) = 0 \wedge f'''(0) \neq 0$. Somit trifft das hinr. Krit. für Wendestellen zu. Wir schließen , dass an der Stelle $x = 0$ ein Wendepunkt existiert .