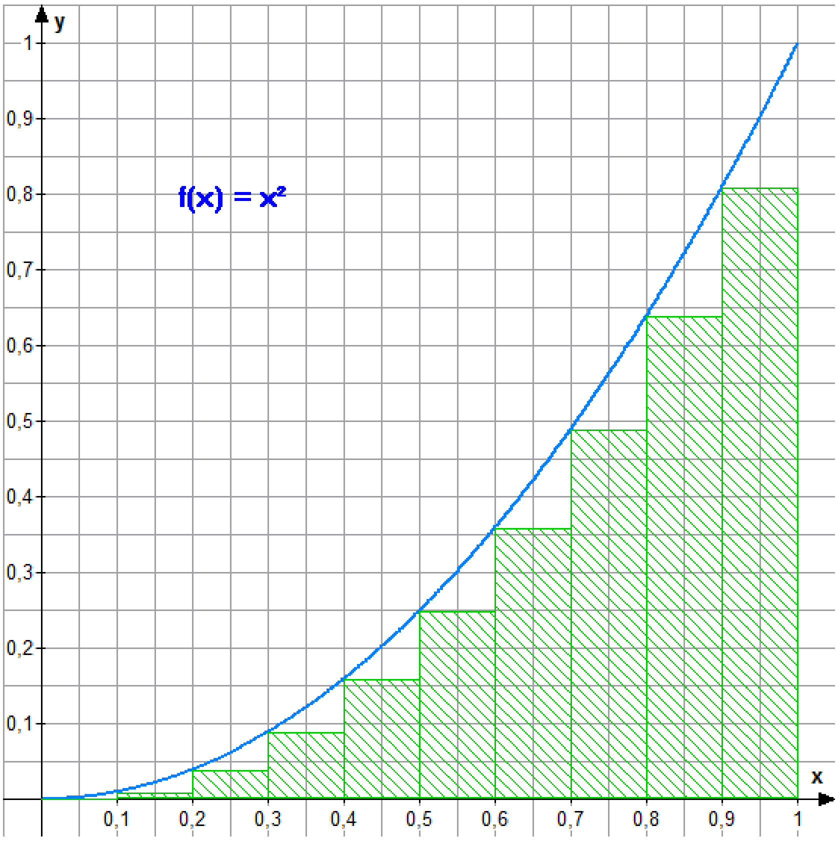
Flächenberechnung mittels Untersummen und Obersummen Ac

Einstieg: Fläche unter einer Normalparabel mit $f(x) = x^2$

Wir approximieren durch Rechtecksflächen, wobei zunächst senkrecht zur x-Achse 10 Streifen gezeichnet werden. Diejenigen Rechtecksflächen, die von der x-Achse und G_f eingeschlossen werden, heißen Untersummen U_{10} , während die von der x-Achse ausgehenden <u>und</u> den Graphen umschließenden Flächen als Obersummen O_{10} bezeichnet werden. Dabei steht die Zahl 10 für die Anzahl der Streifen (allgemein: n Streifen !) .

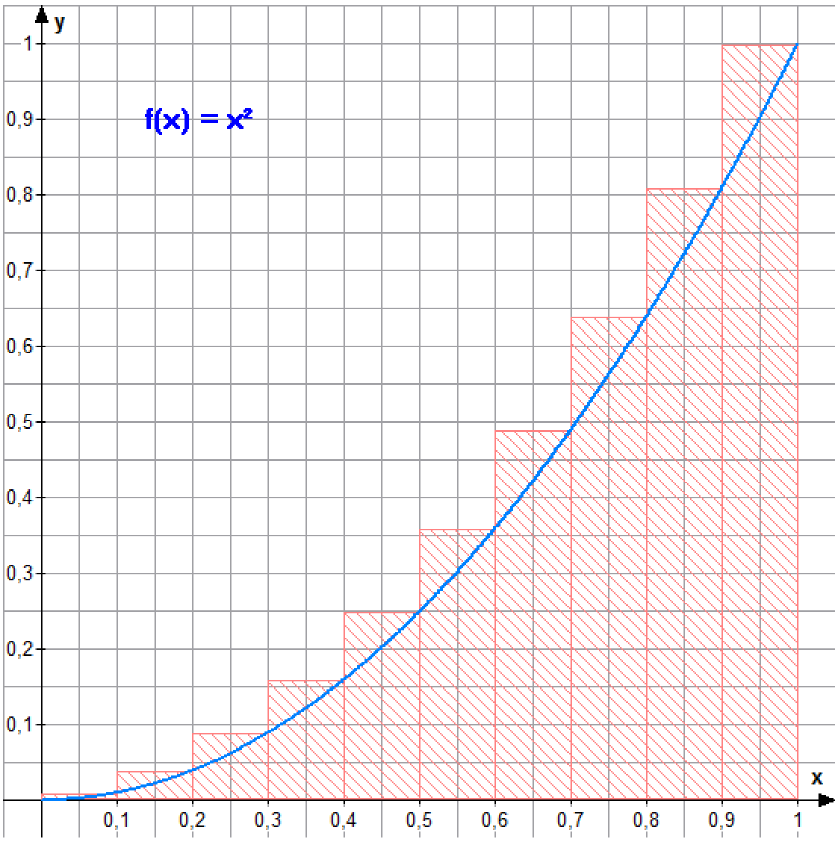


<u>Untersumme:</u>

$U_{10} = 0{,}285$

Rechnung ?

<u>Hinweis:</u>
Die Höhen der Rechtecke können hier auch mit dem Lineal ausgemessen werden, was allerdings zu ziemlich ungenauen Ergebnissen führt.



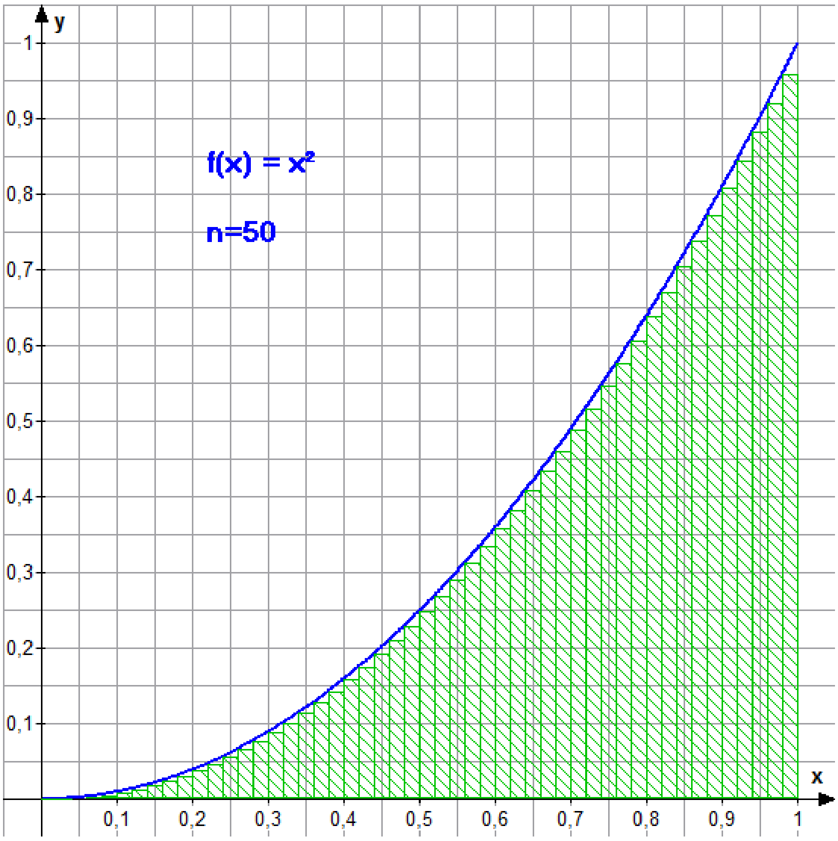
<u>Obersumme:</u>

$O_{10} = 0{,}385$

Welche Ergebnisse erhält man für 50 bzw. 500 Streifen ?

<u>**Tipp:**</u> TI84-Tabelle verwenden mit sum !!

50 Streifen:



Untersumme:

$U_{50} = 0{,}3234$

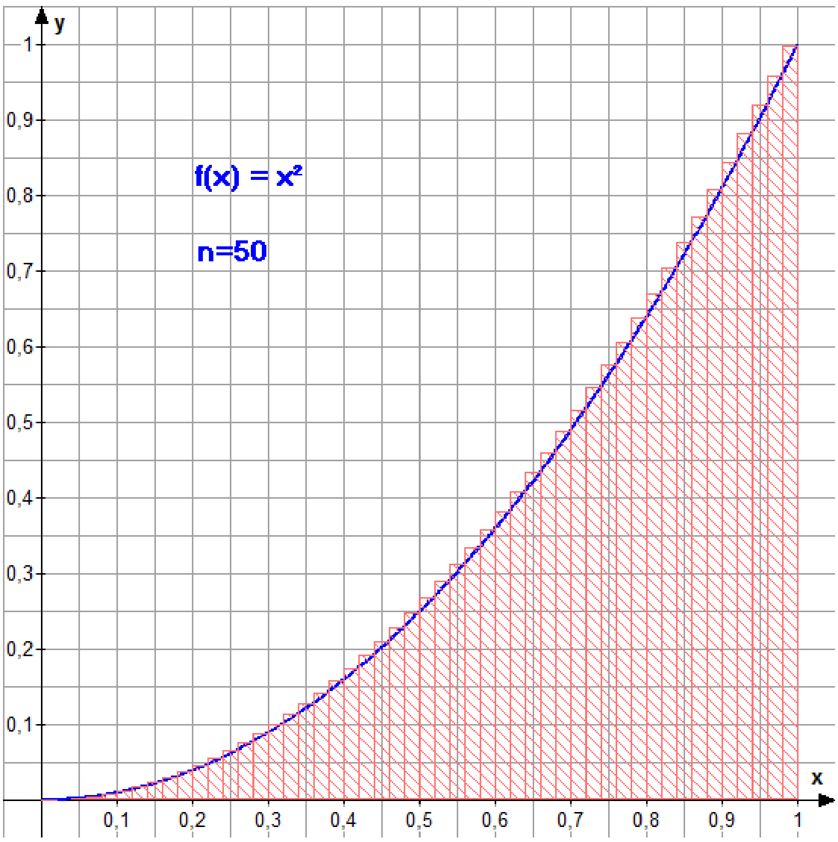
Mit TI84:

```
1/50*sum(seq(X²,
X,0,1-1/50,1/50)
                .3234
```

Hinweise:

sum erhält man mittels
List MATH 5:sum(

seq erhält man mittels
List OPS 5:seq(



Obersumme:

$O_{50} = 0{,}3434$

Mit TI84:

```
1/50*sum(seq(X²,
X,1/50,1,1/50)
                .3434
```

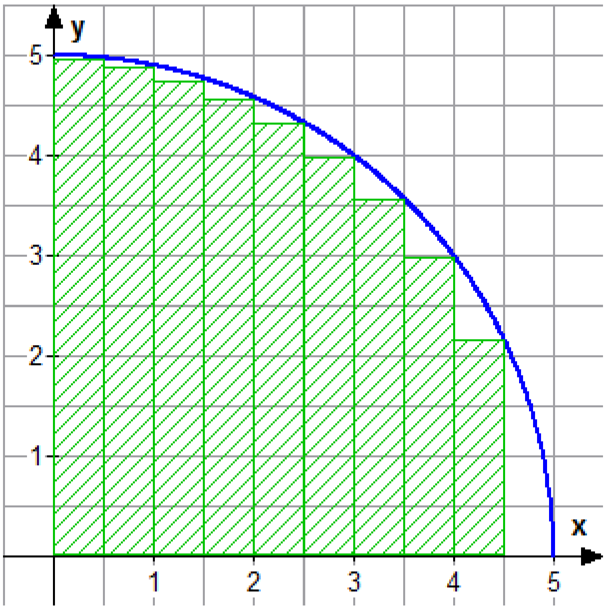
Ein besserer Näherungswert als die Unter- oder Obersumme ist der arithmetische Mittelwert $m = (U+O)/2$.
Man erhält hier für die Zerlegung in n = 50 Streifen: $m = (0{,}3234+0{,}3434)/2 = 0{,}3334$.

Der theoretische (also exakte) Wert für die gesuchte Fläche liegt übrigens bei $A = \frac{1}{3}$.

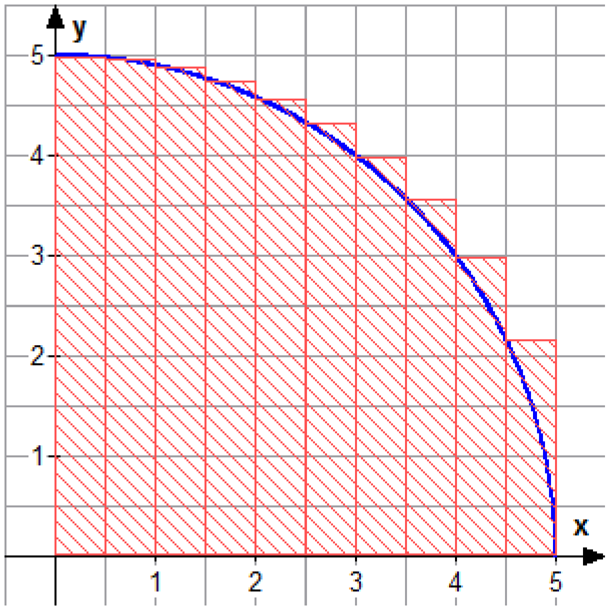
Für n = 500 erhält man mittels TI84: $U_{500} = 0{,}332334$ $O_{500} = 0{,}334334$ $m = 0{,}333334$

Weiteres Beispiel: **Kreisflächenapproximation**

Für einen Kreis mit dem Radius r (oberer Halbkreis !) gilt die Funktionsgleichung $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.



Hier ist $U_{10} \approx 18{,}153$

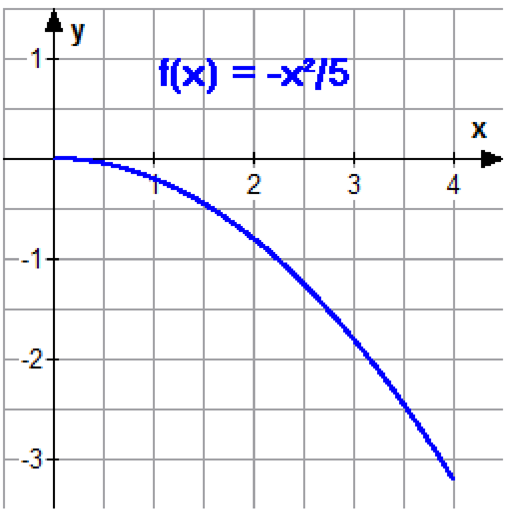


Hier ist $O_{10} \approx 20{,}653$

Für n=50 erhält man:	$U_{50} \approx 19{,}364$	$O_{50} \approx 19{,}864$	Mittelwert: 19,614
Für n=100 erhält man:	$U_{100} \approx 19{,}503$	$O_{100} \approx 19{,}753$	Mittelwert: 19,628
Für n=500 erhält man:	$U_{500} \approx 19{,}609$	$O_{500} \approx 19{,}659$	Mittelwert: 19,634

Das exakte Ergebnis ist bekanntlich $A = \frac{\pi}{4} \cdot 5^2 \approx 19{,}63495$.

Ein Beispiel zum Staunen: **Graph von f mit negativen Funktionswerten**



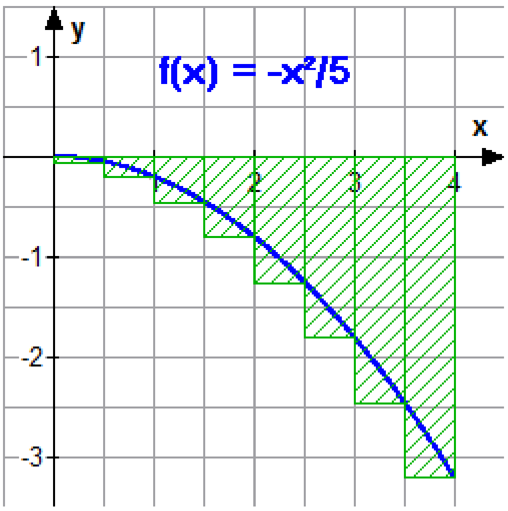
Hier sollen jetzt die Rechtecke zur Untersumme U_8 im **Intervall [0; 4]** eingezeichnet werden.

Ferner ist ein Term zur Berechnung von U_8 aufzustellen.

Wie groß ist U_8 ?

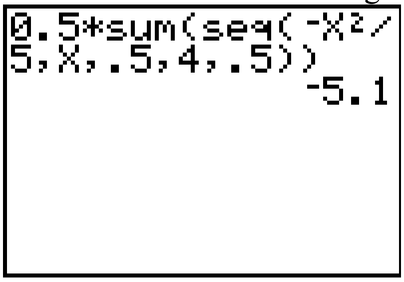
Was fällt auf ? Woran liegt das ?

Lösung:



Term: $U_8 = 0{,}5 \cdot [\, f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5) + \; ... \; + f(4) \,]$

Dies wird mit dem GTR ausgewertet:



Es fällt auf, dass die Untersumme U_8 negativ ist !
Dies liegt daran, dass die Funktionswerte von f negativ sind. Daher ist auch ihre Summe negativ.

Fazit: **Untersummen (und Obersummen) können negativ sein, sie können sogar 0 ergeben !**
Beispiele dafür folgen später.

Anmerkung: Der Flächeninhalt aller Rechtecke ist natürlich nicht negativ, sondern immer positiv.
Daraus folgt, dass Unter- und Obersummen nicht immer identisch mit dem Flächeninhalt sind .

Kurze Zusammenfassung des Verfahrens zur Flächenberechnung

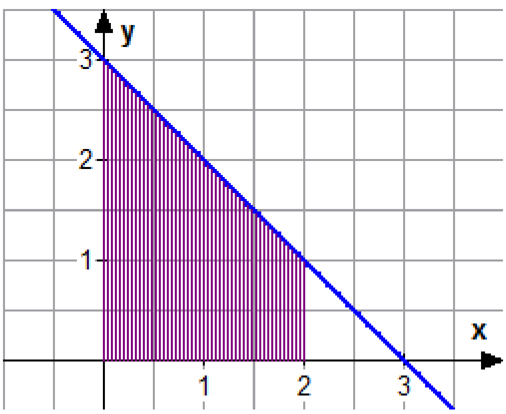
Es handelt sich hier um eine approximative Methode, also eine Näherungslösung.

- Die gesuchte Fläche zwischen Graph und x-Achse wird in n Streifen eingeteilt und durch eine Summe von Rechtecken approximiert. Man unterscheidet Untersummen U_n und Obersummen O_n .
Untersumme und Obersumme können negativ oder 0 sein (wegen möglicher negativer Funktionswerte) .

- Je größer die Anzahl n der Streifen ist, desto besser wird die Approximation. Im Grenzfall $n \to \infty$ (lies: n strebt gegen Unendlich) stimmen Untersumme und Obersumme überein !
Man spricht in diesem Grenzfall vom „Integral über der Funktion f im Intervall [a;b] “ .

Schreibweise: $\int_a^b f(x)\,dx$

Z.B. kann man $\int_0^2 (3-x)\,dx$ graphisch so veranschaulichen:



Beachte: Integrale können negativ sein .
Wie man auch negative Integrale zur Flächenberechnung nutzt wird später behandelt .

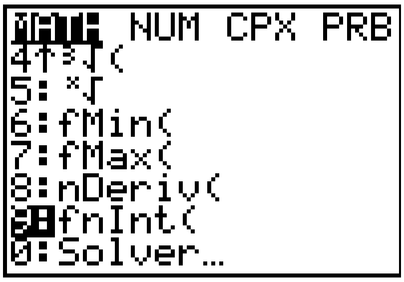
Approximative Berechnung von Integralen mit der TI-Funktion **fnInt**

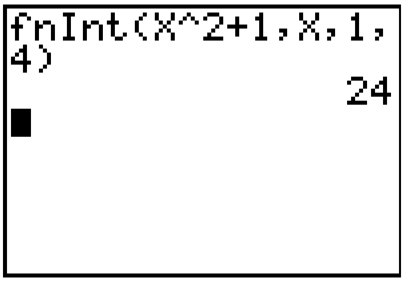
Die Berechnung von Unter- und Obersummen mittels seq ist sehr Zeit raubend, insbesondere dann, wenn die Anzahl n der Streifen sehr groß wird. Beim TI84 sind z.B. nur 999 seq-Elemente möglich. Die Approximation (Näherung) für den gesuchten Flächeninhalt bzw, das Integral ist somit sehr schlecht.

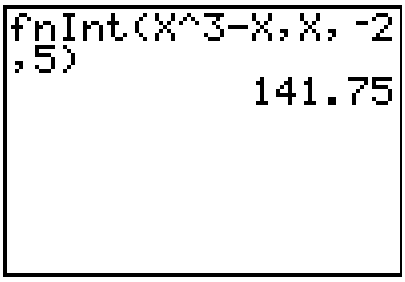
Der TI84 hat eine spezielle Funktion fnInt, welche sehr gute Näherungen liefert.

Die Syntax lautet: **fnInt(Funktionsterm, Variable, linke Intervallgrenze, rechte Intervallgrenze)**

Beispiele (jeweils Skizze des Graphen anlegen !)







Weitere Beispiele (jeweils ausprobieren ! Werden hierbei gleichzeitig eingeschlossene Flächen berechnet ? Skizze !):

$\int_0^5 (3-x)\,dx$ ≈ fnInt(3-x,x,0,5) = 2.5

$\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ ≈ fnInt(√(9-x^2),x,-3,3) = 14.13716… (was in etwa 4,5π entspricht)

$\int_0^\pi \sin(x)\,dx$ ≈ fnInt(sin(x),x,0,π) = 2

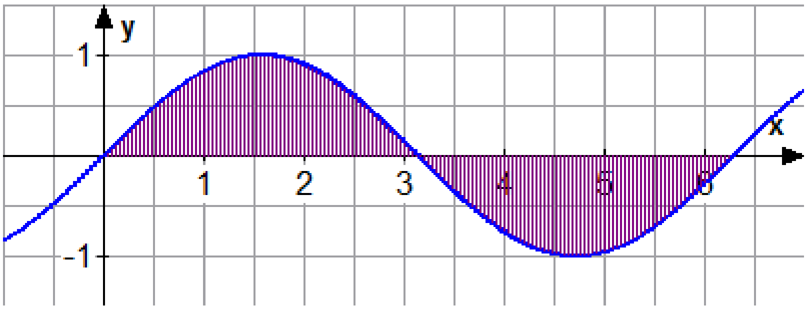
$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx$ ≈ fnInt(sin(x),x,0,2π) = 0 (Oh weh ? grafische Veranschaulichung ?)

Anwendung von **fnInt** bei *negativen* Ergebnissen (bzw. bei 0 als Ergebnis)

1) Fall:
Liegt der Graph im gesamten betrachteten Intervall unterhalb der x-Achse, so ist die Sache ganz einfach.
Es gilt dann A = -fnInt(...) oder auch A = | fnInt(...) | . (|| heißt "Betrag")

2) Fall:
Liegt der Graph im betrachteten Intervall nur teilweise unterhalb der x-Achse, so muss man das Intervall unterteilen und für jedes Teilintervall einen fnInt-Wert berechnen. Der gesuchte Flächeninhalt ist dann gleich der Summe aller **positiv** genommenen fnInt-Werte:
A = | fnInt(...) | + | fnInt(...) | + | fnInt(...) | .

Beispiel: f(x) = sin(x) im Intervall [0 ; 2π] .



Achtung: Den Winkelmodus des TI84 vor der Rechnung im MODE-Menü auf **Radian** stellen !

Rechnet man einfach fnInt(sin(X),X,0,2π) , so erhält man 0 .

Man muss das Intervall [0 ; 2π] unterteilen in [0 ; π] und [π ; 2π] , denn π ist die Nullstelle .

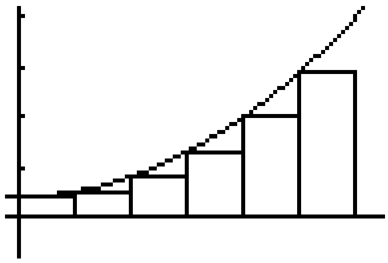
A = | fnInt(sin(X),X,0,π) | + | fnInt(sin(X),X,π,2π) | = | 2 | + | -2 | = 2 + 2 = 4

Alternative Rechnung: A = fnInt(sin(X),X,0,π) - fnInt(sin(X),X,π,2π) = 2 -(-2) = 2 + 2 = 4

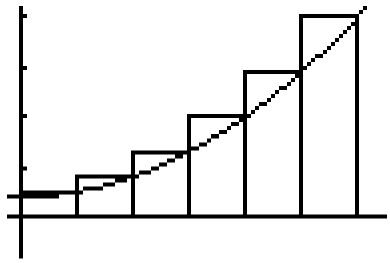
Anhang

Was versteht man unter Obersummen und Untersummen ?
Betrachtung monotoner Funktionen

<u>Problem:</u> Die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse soll im Intervall [a ; b] berechnet werden. Dies kann man z.B. erreichen durch Approximation dieser Fläche mithilfe von „einbeschriebenen“ und „umbeschriebenen“ Rechtecken. Dabei muss unterschieden werden zwischen monoton steigenden und monoton fallenden Funktionen .
Es folgen zwei willkürlich gewählte Beispiele für monotone Funktionen f .

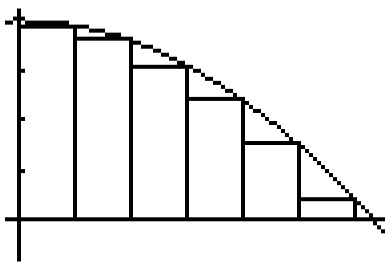


Die Rechteckshöhen der **<u>Untersumme</u>** $\mathbf{U_6}$ sind
$f(0)$, $f(\Delta x)$, $f(2\Delta x)$, … , $f(5\Delta x)$.
Wie man sieht, darf die Stelle $6\Delta x$ nicht mitgezählt werden, weil die entsprechende Höhe bereits zur Obersumme gehört !

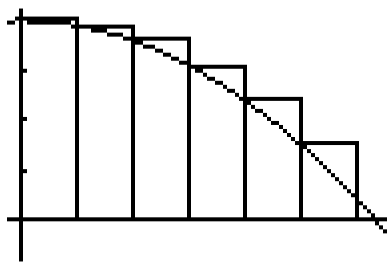


Bei der Obersumme O_6 sind die Rechteckshöhen :
$f(\Delta x)$, $f(2\Delta x)$, … , $f(5\Delta x)$, $f(6\Delta x)$.

f ist hier monoton <u>steigend</u> . Es wurde eine Teilung in $n = 6$ Streifen der Breite Δx festgelegt . Die x-Koordinaten der rechten Begrenzung der Streifen sind von links nach rechts Δx, $2\Delta x$, $3\Delta x$ usw. bis $6\Delta x$.



Die Rechteckshöhen der **<u>Untersumme</u>** $\mathbf{U_6}$ sind
$f(\Delta x)$, $f(2\Delta x)$, … , $f(6\Delta x)$.
Wie man sieht, darf die Stelle $x=0$ nicht mitgezählt werden (diese gehört zur Obersumme !)



Bei der Obersumme O_6 sind die Rechteckshöhen :
$f(0)$, $f(\Delta x)$, $f(2\Delta x)$, … , $f(5\Delta x)$.

f ist hier monoton <u>fallend</u> . Ansonsten gelten die gleichen Voraussetzungen wie bei der monoton steigenden Funktion (oben).

Bezüglich der Ober- und Untersummen sind hier die Verhältnisse jedoch gegenüber steigenden Funktionen genau vertauscht !

Formeln für die Approximation mit Rechtecken im Intervall [0 ; b]

Gegeben : Funktionsterm für f(x) , rechte Intervallgrenze b , Streifenzerlegung n

Es gelten dann : $\Delta x = \dfrac{b}{n}$ $\quad x_i = i \cdot \Delta x \quad f(x_i) = f(i \cdot \Delta x)$

<u>Untersumme</u> $U_n = [\ (f(0) + f(\Delta x) + f(2\Delta x) + \ldots + f((n-1) \cdot \Delta x)\ ] \cdot \Delta x =$ $\Delta x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(i \cdot \Delta x)$ <u>Obersumme</u> $O_n = [\ (f(\Delta x) + f(2\Delta x) + f(3\Delta x) + \ldots + f(n \cdot \Delta x)\ ] \cdot \Delta x =$ $\Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n} f(i \cdot \Delta x)$	**<u>Voraussetzung:</u>** **<u>f ist monoton steigend !</u>** Bei monoton <u>fallenden</u> Funktionen sind die Formeln vertauscht !

<u>Aufgaben:</u>

Berechne jeweils U_n und O_n im Intervall [0 ; b] manuell : Zeichne auch die entsprechende Grafik .

f(x)	**b**	**n**	**U_n**	**O_n**	**A_o(b) exakt**
x^2	1	10 ; 20 (Progr)			
2-x	2	10 ; 20 und 50			
$\sqrt{9-x^2}$	3	10 ; 30 (Progr)			

Verwende das folgende TI83-BASIC-Programm (**USUMGRF**) zur grafischen Darstellung und Berechnung der <u>U_n</u> bzw. <u>O_n</u> der obigen Aufgabe. Verwende auch große n-Werte, z.B. 100 !

<u>Voraussetzungen:</u> Im Y= Editor muss die Funktion f unter Y_1= definiert sein. Das WINDOW muss so eingestellt sein, dass die gesamte Grafik gut zu sehen ist.

<u>Achtung:</u> Bei monoton <u>fallenden</u> Funktionen ist bei der Eingabe von E eine Vertauschung von 0 und 1 (ja=1/nein=0) vorzunehmen (warum ?) . Bei der Eingabe von Wurzelfunktionen ist Vorsicht geboten wegen der Rundungsfehler des TI83 (<u>Beispiel:</u> Bei √(9-x²) erhält man für bestimmte n-Werte wie n=31 Fehlermeldungen mit Programmabbruch) . Daher sollte statt Y1=√(9-x²) sicherheitshalber die Gleichung Y1=√(abs(9-x²)) eingegeben werden. (abs = MATH NUM 1)

ClrHome Prompt A Prompt B Prompt N Disp “f steigend ?“ Disp “ja=0/nein=1” Input E ClrDraw DispGraph	(B-A)/N→D A→X 0→S For(I,1,N) X→Z If E=1 X+D→Z If N≤30 Then	Line(X,0,X,Y₁(Z)) Line(X,Y₁ (Z),X+D,Y₁(Z)) Line(X+D,0,X+D,Y₁(Z)) End S+Y₁(Z) →S X+D→X End S*D→S Text(57,0,“Summe=“,S)

<u>Beispiel:</u> $f(x) = x^2 + 0{,}1 \quad a = 0 \quad b = 1 \quad n = 10$