Integralfunktion und Stammfunktion bei zusammengesetzten Funktionen *(Ac)*

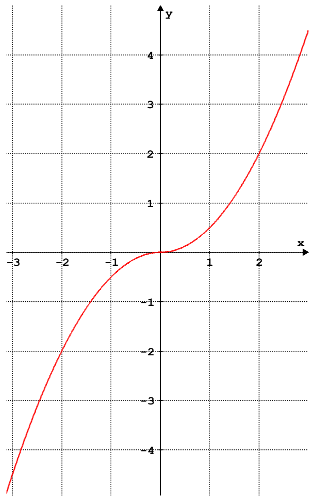
Stetigkeit und Differenzierbarkeit als Voraussetzung für Integralfunktionen

Die Integralfunktion $I_a(x)$ einer Randfunktion f(x) gibt für jedes beliebige x das Integral im Intervall [a ;x] an. (Für positives f(x) ist dies identisch mit dem Flächeninhalt zwischen G_f und x-Achse.)
Bei bestimmten Funktionen ist die Integralfunktion bzw. Stammfunktion F entweder schwer zu bestimmen oder aber sie existiert überhaupt nicht.

Wir betrachten 3 Beispiele:

1. Beispiel: $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & falls\ x \geq 0 \\ -x, & falls\ x < 0 \end{cases}$

Aufleiten der Teilterme liefert $F(x) = \begin{cases} 0{,}5x^2, & falls\ x \geq 0 \\ -0{,}5x^2, & falls\ x < 0 \end{cases}$



Diese Funktion ist sowohl stetig als auch differenzierbar, und zwar an jeder Stelle x . Warum ?

Mithilfe der Beziehung: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ lassen sich für $f(x) = |x|$ beliebige Integrale bzw. Flächeninhalte berechnen.

Beispiele für Integrale zu obiger Randfunktion f sind:

Intervall [-3;5]: $F(5) - F(-3) = 0{,}5 \cdot 5^2 - (-0{,}5 \cdot (-3)^2) = 12{,}5 + 4{,}5 = 17$. Dies ist exakt das Integral (und auch der Flächeninhalt) im betrachteten Intervall.

Intervall [-3;-2]: $F(-2) - F(-3) = -0{,}5 \cdot (-2)^2 - (-0{,}5 \cdot (-3)^2) = -2 + 4{,}5 = 2{,}5$. Stimmt auch !

Intervall [1;6]: $F(6) - F(1) = 0{,}5 \cdot 6^2 - 0{,}5 \cdot 1^2 = 18 - 0{,}5 = 17{,}5$. Stimmt auch !

Wie sehen die <u>Integralfunktionen</u> $I_a(x)$ zur unteren Grenze a aus ?
Hier muss man unterscheiden, ob a positiv oder negativ ist !

Beispiele:

$A_{-3}(x) = \begin{cases} 0{,}5x^2 + 4{,}5, & falls\ x \geq 0 \\ -0{,}5x^2 + 4{,}5, & falls\ x < 0 \end{cases}$

Probe: $A_{-3}(5) = 0{,}5 \cdot 5^2 + 4{,}5 = 17$ OK

Probe: $A_{-3}(-2) = -0{,}5 \cdot (-2)^2 + 4{,}5 = 2{,}5$ OK

$A_1(x) = \begin{cases} 0{,}5x^2 - 0{,}5, & falls\ x \geq 0 \\ -0{,}5x^2 - 0{,}5, & falls\ x < 0 \end{cases}$

Probe: $A_1(6) = 0{,}5 \cdot 6^2 - 0{,}5 = 17{,}5$ OK

Probe: $A_1(-2) = -0{,}5 \cdot (-2)^2 - 0{,}5 = -2{,}5$ OK !!

Komplizierter wird die Bestimmung einer Stammfunktion, wenn die beiden Funktionsteile von f an einer Stelle $x \neq 0$ zusammenstoßen. Dann muss zuerst eine additive Konstante so bestimmt werden, dass Stetigkeit und Differenzierbarkeit gewährleistet sind. Daher das

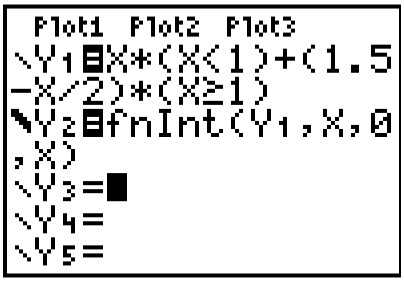
<u>2. Beispiel:</u> $f(x) = \begin{cases} x, & falls\ x < 1 \\ 1{,}5 - 0{,}5x, & falls\ x \geq 1 \end{cases}$

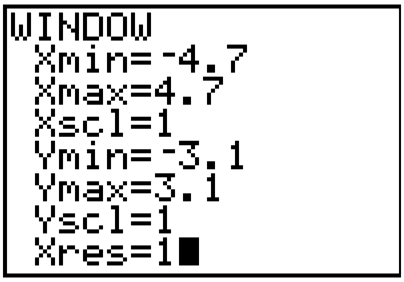
Aufleiten liefert $F(x) = \begin{cases} 0{,}5x^2, & falls\ x < 1 \\ 1{,}5x - 0{,}25x^2 + C, & falls\ x \geq 1 \end{cases}$

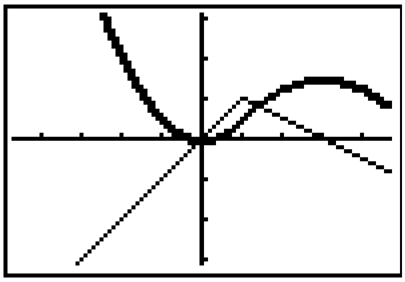
Wählt man nun $C = -0{,}75$, so ist F stetig und differenzierbar, also eine Stammfunktion.
Wegen $F(0) = 0$ ist mit diesem $C = -0{,}75$ eine Integralfunktion zur unteren 0 Grenze gefunden.

Daher gilt $I_o(x) = \begin{cases} 0{,}5x^2, & falls\ x < 1 \\ 1{,}5x - 0{,}25x^2 - 0{,}75, & falls\ x \geq 1 \end{cases}$

Dieses Beispiel soll nun mit den Möglichkeiten des TI83 untersucht werden. Dabei wird die Integralfunktion mittels **fnInt(Funktionswert,Variable,untere Grenze,Variable)** gezeichnet. Die Funktionswerte dieser Integralfunktion geben dann das Integral bezüglich der unteren Grenze (hier 0) an. Gleichzeitig werden entsprechende Flächeninhalte zwischen G_f und x-Achse schraffiert.



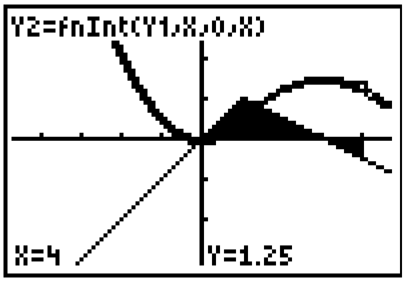




<u>Beispiel:</u>

$I_o(4)$ soll bestimmt werden:
Mit CALC 7 wird zunächst eine Approximation des Integrals mit den Grenzen 0 und 4 bestimmt. Der Rechner liefert 1,25.

Außerdem wird mit TRACE und Wahl von x=4 bei der Funktion Y2 das Ergebnis der Integralfunktion ermittelt. Auch hier liefert der Rechner den Wert 1,25. Dies ist sogar das exakte Ergebnis.
I



Die exakte Rechnung lautet: $I_o(4) = 1{,}5 \cdot 4 - 0{,}25 \cdot 4^2 - 0{,}75 = 6 - 4 - 0{,}75 = 1{,}25$!

Dass zuweilen eine Stammfunktion nicht existiert, zeigt das

<u>3. Beispiel:</u> $f(x) = \begin{cases} 1, & falls\ x \geq 0 \\ 0, & falls\ x < 0 \end{cases}$ Aufleiten liefert $F(x) = \begin{cases} x, & falls\ x \geq 0 \\ C, & falls\ x < 0 \end{cases}$

Die erste Bedingung für eine Stammfunktion ist die <u>Stetigkeit</u>. Diese erreicht man bei diesem Beispiel, wenn man C = 0 setzt. Die Funktion ist dann

$F(x) = \begin{cases} x, & falls\ x \geq 0 \\ 0, & falls\ x < 0 \end{cases}$. F(x) ist zwar überall stetig, jedoch an der Stelle x = 0 (wo ein Knick auftritt) nicht <u>differenzierbar</u>. Daher ist es **<u>keine Stammfunktion</u>** ! Aus diesem Grunde lässt sich auch keine Integralfunktion I_a angeben.