TAYLOR-Polynome im MU (Langfassung) Ac

Theorie:
Taylorpolynome sind ganzrationale Funktionen T(x), welche eine bestimmte andere Funktion f(x) in der Umgebung einer vorgegebenen Stelle x_0 approximieren.

$$T(x) = a_0 + a_1(x-xo) + a_2(x-xo)^2 + a_3(x-xo)^3 + \ldots + a_n(x-xo)^n = \sum_{i=0}^{n} a_i(x-x_0)^i \quad \text{(Taylorpol. allgemein)}$$

$$T(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \quad \text{(Taylorpolynom für } x_0\text{=0)}$$

Je höher der Grad n des Polynoms, desto besser wird die Approximation in der Umgebung von x_0.

Das Prinzip für die Bildung des Taylorpolynoms T ist, dass jede Ableitung von T(x) an der Stelle x_0 mit der entsprechenden Ableitung von f(x) übereinstimmen muss, also $\boxed{T^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)}$ für i von 0 bis n .

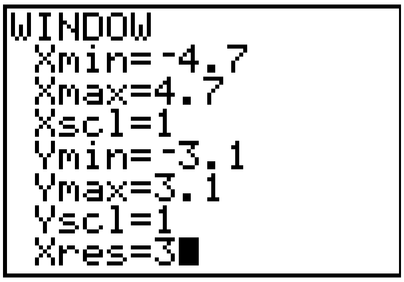
Hierfür ein Beispiel: f(x) = sin(x); $x_0 = 0$; Grad n = 3 . Wir stellen also ein Polynom T 3.Grades auf :

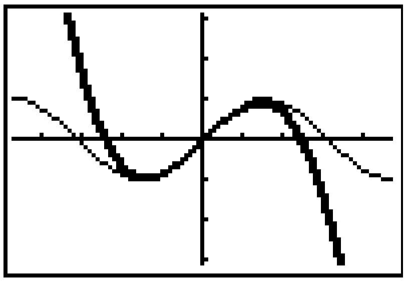
Taylorpolynom:		$T(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$	An der Stelle $x_0 = 0$ gilt dann:	$T(0) = a_0$
Ableitungen:	1.	$T'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$	An der Stelle $x_0 = 0$ gilt dann:	$T'(0) = a_1$
	2.	$T''(x) = 2a_2 + 6a_3x$	An der Stelle $x_0 = 0$ gilt dann:	$T''(0) = 2a_2$
	3.	$T'''(x) = 6a_3$	An der Stelle $x_0 = 0$ gilt dann:	$T'''(0) = 6a_3$

f(x) = sin(x) besitzt die Ableitungen f '(x) = cos(x) f ''(x) = -sin(x) f '''(x) = -cos(x) .
Betrachtet man die Stelle $x_0 = 0$, so gilt: f(0) = 0 f '(0) = 1 f ''(0) = 0 f '''(0) = -1 .
Wegen der oben angegebenen Bedingung $T^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$ müssen also die folgenden Gleichungen gelten: T(0) = f(0), T '(0) = f '(0), T ''(0) = f ''(0), T '''(0) = f '''(0) . Alle diese Terme wurden bereits oben ermittelt. Daher folgt für die Polynomkoeffizienten: $a_0 = 0$ $a_1 = 1$ $a_2 = 0$ $a_3 = -1/6$.

Somit ergibt sich das Taylorpolynom 3.Ordnung von f(x) = sin(x) an der Stelle $x_0 = 0$ zu : $\mathbf{T(x) = x - \frac{x^3}{6}}$

Die Darstellung mit dem TI83 zeigt, wie gut die Approximation in der Umgebung von 0 ist. Das Window wurde eingestellt über ZOOM 4:ZDecimal . Xres=3 ermöglicht ein schnelleres Zeichnen der Graphen !





Allgemein lässt sich beweisen, dass man für die Koeffizienten a_i eines Taylorpolynoms T die Beziehung

$\boxed{a_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \; ; \; i = 0 \; bis \; n}$ erhält. $f^{(i)}$ bedeutet dabei die i-te Ableitung !

Die a_i sind dann $a_0 = f(x_0)$ $a_1 = f'(x_0)$ $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$ $a_3 = \frac{f'''(x_0)}{6}$ usw.

Das allgemeine Taylorpolynom für die Approximation an einer Stelle x_0 lautet:

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Einige Taylorpolynome (für $x_0 = 0$):

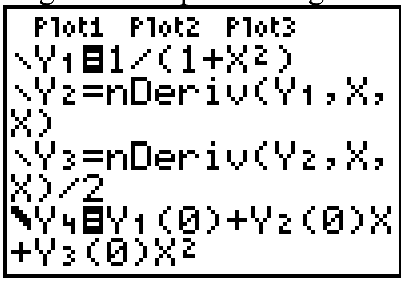
$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad T(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$

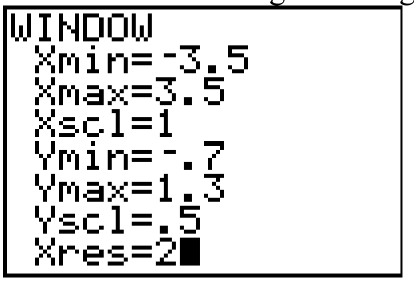
$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad T(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$

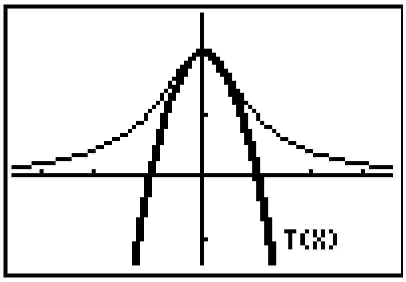
$f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad T(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} \frac{x^{2i}}{(2i)!}$

Taylorpolynome mit dem TI83 automatisch erzeugen :

Beim TI83 bietet sich die Funktion **nDeriv** an, um Ableitungen zu berechnen. Allerdings sind diese nur approximativ ! Außerdem kommt **einschränkend** hinzu, dass nDeriv nur die erste Ableitung berechnet und dass Verschachtelungen mit nDeriv nur bis zur Tiefe 2 möglich sind. Versucht man etwa eine Kombination der Form nDeriv(nDeriv(nDeriv … , so kommt die Fehlermeldung ILLEGAL NEST (unzulässige Verschachtelung) .
Es bleibt daher nur die Möglichkeit, automatische Berechnungen bis zum Grad n = 2 durchzuführen. Das folgende Beispiel einer gebrochenrationalen Funktion zeigt die Vorgehensweise.

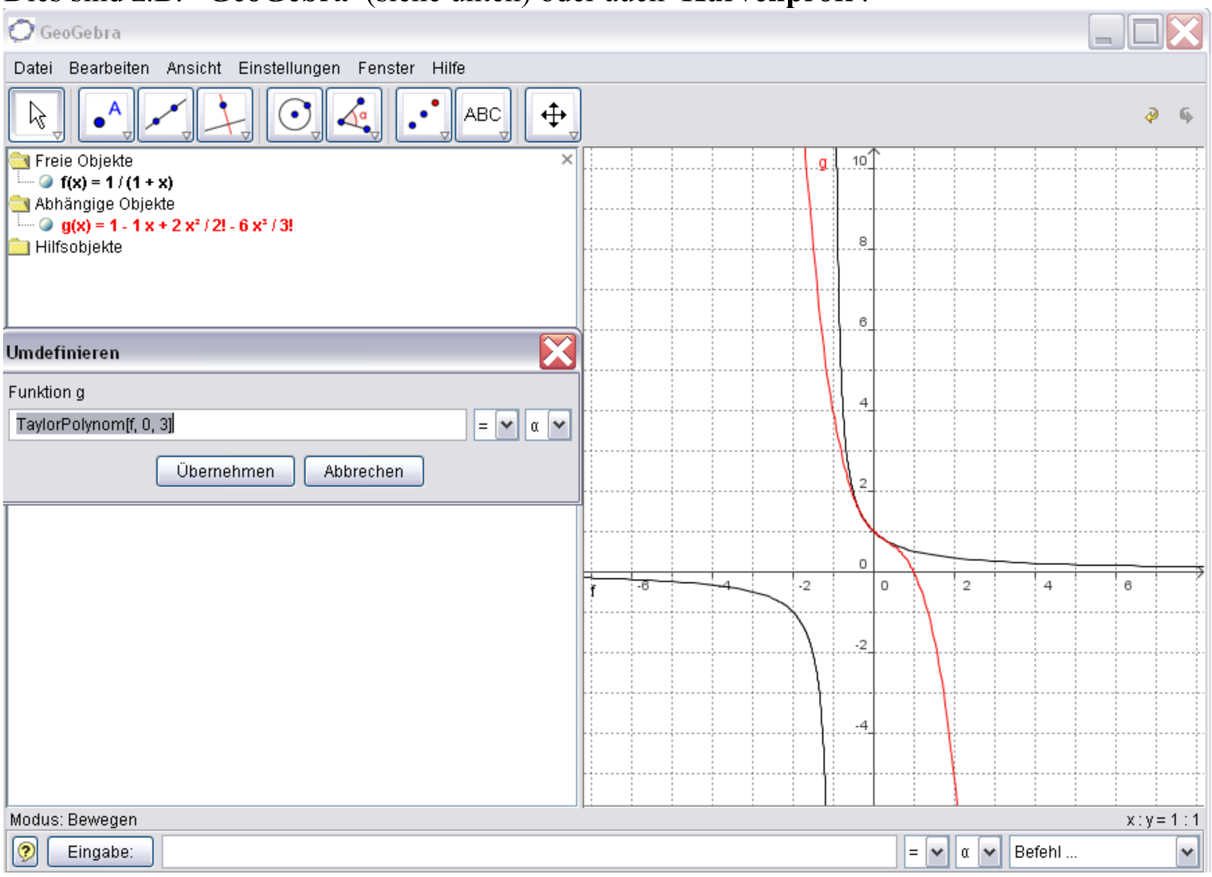






Taylorpolynome mit Computeralgebraprogrammen (CAS)

Mit CAS (z.B. TI92, Voyage, Derive, MuPad) können die Ableitungen exakt berechnet werden. Man kann sich auch die Mühe machen, ein Modul namens „Taylorpolynom" zu programmieren.
Immerhin gibt es einige (sogar kostenlose) Windows-Programme, mit denen man auf Knopfdruck Taylorpolynome exakt (mittels symbolischer Ableitung) erzeugen kann.
Dies sind z.B. **GeoGebra** (siehe unten) oder auch **Kurvenprofi** .



Taylorpolynome für gebrochenrationale Funktionen

Im folgenden gelte in der Regel Grad n = 3 und $x_0 = 0$:

Beispiel 1: $\boxed{f(x) = \frac{1}{1+x}}$

Ableitungen $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ $\quad f''(x) = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}$ $\quad f'''(x) = \frac{-2\cdot 3(1+x)^2}{(1+x)^6} = \frac{-6}{(1+x)^4}$

Bedingungen: $a_0 = f(0) = 1$ $\quad a_1 = f'(0) = -1$ $\quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = 1$ $\quad a_3 = \frac{f'''(0)}{6} = -1$

Das Taylorpolynom ist daher $T(x) = 1 - x + x^2 - x^3$

Beispiel 2: $\boxed{f(x) = \frac{1}{1+x^2}}$

Ableitungen $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ $\quad f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$ $\quad f'''(x) = \frac{-24x(x^2-1)}{(1+x^2)^4}$

Bedingungen: $a_0 = f(0) = 1$ $\quad a_1 = f'(0) = 0$ $\quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = -1$ $\quad a_3 = \frac{f'''(0)}{6} = 0$

Das Taylorpolynom ist daher $T(x) = 1 - x^2$

Beispiel 3: $\boxed{f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}}$

Ableitungen $f'(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$ $\quad f''(x) = \frac{6}{(x-1)^4}$ $\quad f'''(x) = \frac{24}{(1-x)^5}$

Bedingungen: $a_0 = f(0) = 1$ $\quad a_1 = f'(0) = 2$ $\quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = 3$ $\quad a_3 = \frac{f'''(0)}{6} = 4$

Das Taylorpolynom ist daher $T(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$

Beispiel 4: $\boxed{f(x) = \frac{x}{2x+1}}$

Ableitungen $f'(x) = \frac{2x+1-x\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2}$ $\quad f''(x) = \frac{-1\cdot 2(2x+1)\cdot 2}{(2x+1)^4} = \frac{-4}{(2x+1)^3}$ $\quad f'''(x) = \frac{4\cdot 3(2x+1)^2\cdot 2}{(2x+1)^6} = \frac{24}{(2x+1)^4}$

Bedingungen: $a_0 = f(0) = 0$ $\quad a_1 = f'(0) = 1$ $\quad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = -2$ $\quad a_3 = \frac{f'''(0)}{6} = 4$

Das Taylorpolynom ist daher $T(x) = x - 2x^2 + 4x^3$

Weitere Beispiele in Kurzform (jeweils $x_0 = 0$):

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ $\qquad T(x) = x - x^3$

$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ $\qquad T(x) = -x - x^3$

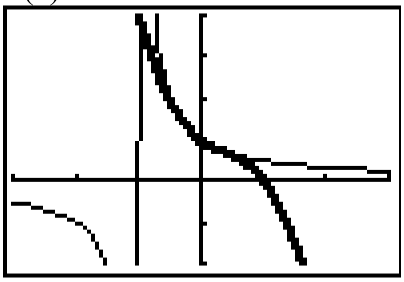
$f(x) = \tan(x)$ $\qquad T(x) = x + \frac{1}{3}x^3$

$f(x) = \frac{x^2-3}{2x^2+4}$ $\qquad T(x) = -0{,}75 + 0{,}625x^2$

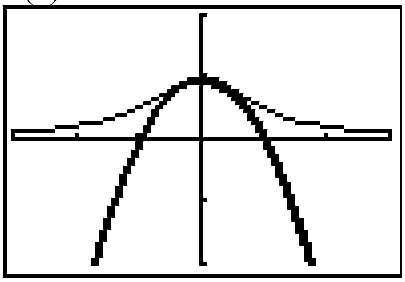
$f(x) = \sqrt{x+1}$ $\qquad T(x) = 1 + 0{,}5x - 0{,}125x^2 + 0{,}0625x^3$

<u>Grafische Darstellung der Beispiele mit dem GTR:</u>

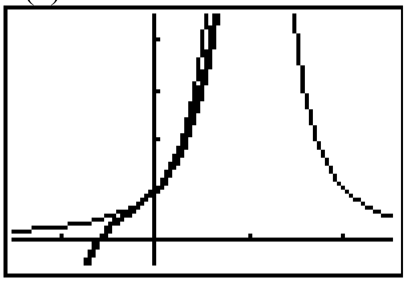
$f(x) = 1/(1+x)$
$T(x) = 1 - x + x^2 - x^3$



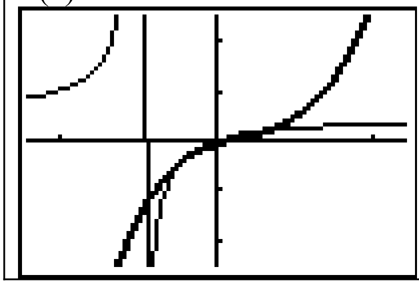
$f(x) = 1/(1+x^2)$
$T(x) = 1 - x^2$



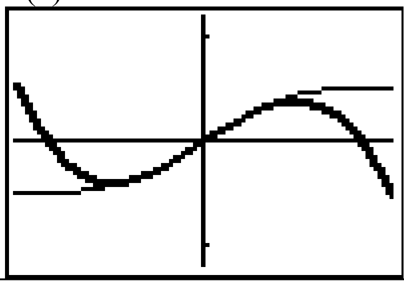
$f(x) = 1/(1-x)^2$
$T(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$



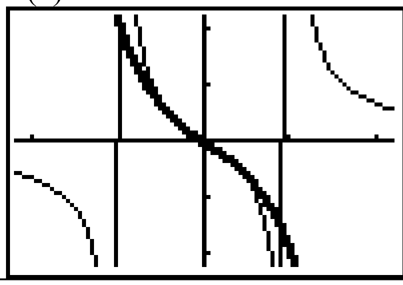
$f(x) = x/(2x+1)$
$T(x) = x - 2x^2 + 4x^3$



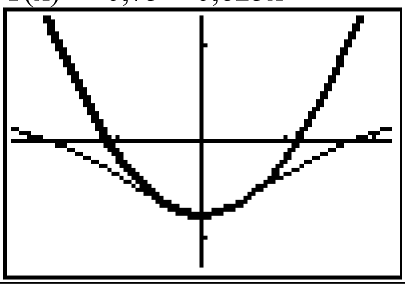
$f(x) = x/(x^2+1)$
$T(x) = x - x^3$



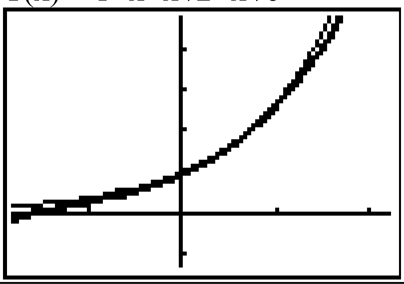
$f(x) = x/(x^2-1)$
$T(x) = -x - x^3$



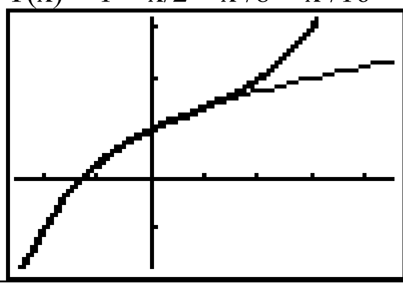
$f(x) = (x^2-3)/(2x^2+4)$
$T(x) = -0{,}75 + 0{,}625x^2$



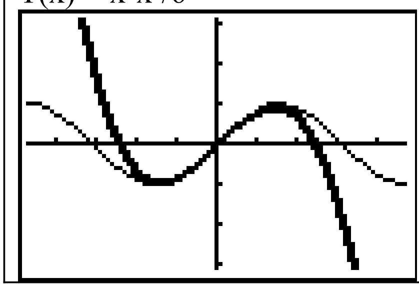
$f(x) = e^x$
$T(x) = 1+x+x^2/2+x^3/6$



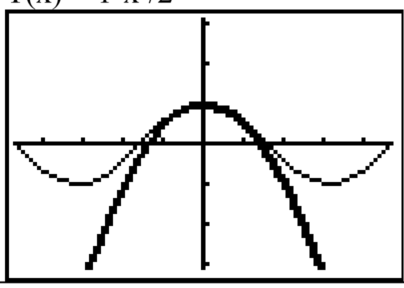
$f(x) = \sqrt{x+1}$
$T(x) = 1 + x/2 - x^2/8 + x^3/16$



$f(x) = \sin(x)$
$T(x) = x-x^3/6$



$f(x) = \cos(x)$
$T(x) = 1-x^2/2$



$f(x) = \tan(x)$
$T(x) = x+x^3/3$