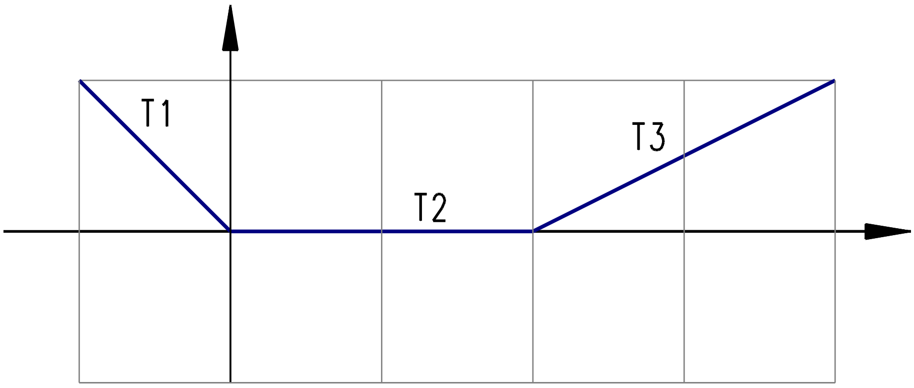
Trassierung (Einführung)

Aufgabenstellung:



Das Teilstück T2 soll durch eine ganzrationale Funktion f ersetzt werden, so dass eine knickfreie Straße entsteht.

Lösungsweg:

In Frage kommen:
1) Ganzrationale Funktionen 3. Ordnung oder 5. Ordnung
2) Trigonometrische Funktionen der Form A*sin(Bx+C) + D*cos(Ex +F)

Die Bedingungen $f(0) = 0$ $f(2) = 0$ $f'(0) = -1$ $f'(2) = 0{,}5$
legen einen Ansatz folgender Form nahe:

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Man erkennt sofort, dass D = 0 und C = -1 sein müssen.
Es bleibt ein 2x2 – LGS übrig, das mit dem **Gaußschen Eliminationsverfahren** gelöst wird :

Die gesuchte Funktion ist $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - x$

Aufgabe: Berechne mit einem CAS – Rechner näherungsweise die Bogenlänge des Kurvenstücks !

Lösung: Bogenlänge ≈ 2,1832 LE

Nimmt man zu den obigen 4 Bedingungen noch die **Ruckfreiheit** („Lenkradruck“) an den Übergangsstellen hinzu, so ergeben sich 2 weitere Bedingungen $f''(0) = 0$ und $f''(2) = 0$.

Es muss aber dann eine ganzrationale Funktion 5. Grades angesetzt werden:

$$f_2(x) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$

Die 6 Bedingungen liefern dann :

F = 0 E = -1 D = 0

Somit bleibt ein 3x3 – LGS übrig:

I 32A + 16B + 8C = 2
II 80A + 32B + 12C = 1,5
III 160A + 48B + 12C = 0

Der Einfachheit halber verwenden wir im folgenden eine Matrixschreibweise (Tabelle !).

A	B	C	1
32	16	8	2
80	32	12	1,5
160	48	12	0

Überlege, welche Operationen sinnvoll wären ?

Am leichtesten lässt sich C eliminieren ! Daher dividieren wir Gleichung I durch 2 :

A	B	C	1	Operation
16	8	4	1	-
80	32	12	1,5	II – 3 · I
160	48	12	0	III - II

A	B	C	1	Operation
16	8	4	1	-
32	8	0	-1,5	: 8
80	16	0	-1,5	III – 2 · II

A	B	C	1	Operation
16	8	4	1	I – III
4	1	0	-0,1875	4 · II – III
16	0	0	+1,5	: 16

A	B	C	1	Operation
0	8	4	-0,5	I – 2 · II
0	4	0	-2,25	: 4
1	0	0	0,09375	-

A	B	C	1	Operation
0	0	4	4	: 4
0	1	0	-0,5625	-
1	0	0	0,09375	-

A	B	C	1	Operation
0	0	1	1	-
0	1	0	-0,5625	-
1	0	0	0,09375	-

Wir lesen ab: $A = 0{,}09375 = \frac{3}{32}$ $B = -0{,}5625 = -\frac{9}{16}$ $C = 1$

Also ist $f_2(x) = \frac{3}{32}x^5 - \frac{9}{16}x^4 + x^3 - x$

Anmerkung: Die Bogenlänge im Intervall [0 ; 2] beträgt ≈ 2,2693 LE !

Eine dritte Möglichkeit der Trassenführung liefert die folgende trigonometrische Funktion:

$$f_3(x) = \frac{3}{2\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) - \frac{1}{4\pi} \cdot \sin(\pi \cdot x)$$

Aufgaben:

1) Bestimme die Bogenlänge für f_3 .
2) Berechne für alle 3 Funktionen die Fläche zwischen dem Grafen und der x-Achse. Welche wirtschaftlichen Überlegungen sind mit diesen Flächen verbunden ?
3) Zeichne die gesamte Strassenführung mit allen 3 Funktionen sowie T1 und T2 mithilfe eines CAS-Systems.

Grafik: