Die vollständige Induktion *Ac*

Um die Gültigkeit einer mathematischen **Aussageform A(n)** zu beweisen, geht man folgendermaßen vor :

1. <u>Induktionsanfang bzw. Induktionsverankerung :</u>
Beweis der Aussageform A(n) für $n=1$ oder einen anderen Anfangswert $n=n_0$:

2. <u>Induktionsschluß von k auf k+1 :</u>
Beweis der Schlußfolgerung: Wenn A(k) gilt, dann gilt auch A(k+1) .

<u>Anmerkung:</u> Hat man nachgewiesen, daß A(1) gilt, so ist wegen des Induktionsschlusses von A(k) auf A(k+1) Auch A(2) gültig. (Wenn A(1) gilt, dann gilt auch A(2) !).
Ebenfalls wegen des Induktionsschlusses von A(k) auf A(k+1) gilt dann aber auch A(3), denn „Wenn A(2) gilt, so gilt auch A(3)“. Dies läßt sich beliebig (für alle k) fortführen.

<u>Beispiele:</u>

1) Beweise, daß gilt: $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-1) = n^2$

1. Induktionsanfang : $1 = 1^2$, daher gilt A(1) .

2. Induktionsschluß von k auf k+1 :

Zu zeigen ist: Wenn A(k) gilt, so gilt auch A(k+1) , d.h.:

Wenn $1+3+5+ ... + (2k-1) = k^2$ gilt, so gilt auch $1+3+5+ ... + (2(k+1)-1) = (k+1)^2$.

<u>Beweis</u>: Induktionsannahme: Es gelte A(k) , d.h. $1+3+5+ ... + (2k-1) = k^2$.

Dann folgt: $1+3+5+ ... + (2k-1)+(2(k+1)-1) =$
$k^2+(2(k+1)-1) =$ (nach Ind.annahme)
$k^2+2k+1 = (k+1)^2$ (Bin.Formel)

q.e.d.

2) Beweise, daß gilt: $2^n > n^2$ für $n \geq 5$

1. Induktionsanfang : $2^5 > 5^2 \Leftrightarrow 32 > 25$, daher gilt A(5) .

2. Induktionsschluß von k auf k+1 :

Zu zeigen ist: Wenn A(k) gilt, so gilt auch A(k+1) , d.h. :

Wenn $2^k > k^2$ gilt, so gilt auch $2^{k+1} > (k+1)^2$.

<u>Beweis:</u> Induktionsannahme: Es gelte A(k) , d.h. $2^k > k^2$.

Dann folgt: $2^{k+1} = 2^k * 2^1 = 2 * 2^k > 2 * k^2 = k^2 + k*k \geq$
$k^2 + 5*k = k^2 + 2k + 3k > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$. q.e.d.

3) Beweise, daß gilt: 5 ist ein Teiler von $6^n + 4$

1. Induktionsanfang : 5 ist ein Teiler von $6^1 + 4 = 10$, daher gilt A(1) .

2. Induktionsschluß von k auf k+1 :

Zu zeigen ist: Wenn A(k) gilt, so gilt auch A(k+1) , d.h. :

Wenn 5 ein Teiler von $6^k + 4$, so auch von $6^{k+1} + 4$.

<u>Beweis:</u> Induktionsannahme: Es gelte A(k) , d.h. 5 ist Teiler von $6^k + 4$.

Dann folgt: $6^{k+1} + 4 = 6^1 * 6^k + 4 = (5+1) * 6^k + 4 = 5 * 6^k + 1 * 6^k + 4 =$
$5 * 6^k + (6^k + 4)$

Nun ist aber 5 ein Teiler von $6^k + 4$ (Ind. Annahme) ; ferner ist auch 5 ein Teiler von $5 * 6^k$. Daher ist 5 auch ein Teiler der Summe dieser beiden Terme !

q.e.d.

4) Beweise, daß gilt: $3^n \leq n!$ für $n \geq 7$

1. Induktionsanfang : $3^7 = 2187 \leq 5040 = 7!$, daher gilt A(7) .

2. Induktionsschluß von k auf k+1 :

Zu zeigen ist: Wenn A(k) gilt, so gilt auch A(k+1) , d.h. :

Wenn $3^k \leq k!$ gilt , so gilt auch $3^{k+1} \leq (k+1)!$.

<u>Beweis:</u> Induktionsannahme: Es gelte A(k) , d.h. $3^k \leq k!$.

Dann folgt: $3^{k+1} = 3^1 * 3^k \leq 3 * k! \leq (k+1) * k!$ (weil $3 \leq k+1$ gilt für $k \geq 7$)
$= (k+1)!$

q.e.d.

5) Zeige, daß der Induktionsschritt zwar durchführbar, die Formel jedoch für alle n falsch ist:
2 ist Teiler von $\mathbf{3^n + 4}$

Induktionsschluß von k auf k+1 :

Zu zeigen ist: Wenn 2 Teiler von $3^k + 4$ ist, so ist 2 auch Teiler von $3^{k+1} + 4$.

<u>Beweis:</u> Induktionsannahme: Es gelte A(k) , d.h. 2 ist Teiler von $3^k + 4$
Hieraus folgt, daß 2 sowohl Teiler von 4 als auch von 3^k ist .

Wenn 2 Teiler von 3^k ist, so auch von 3^{k+1}, denn dies ist ein Vielfaches von 3^k.
Dann teilt 2 auch die Summe von 3^{k+1} und 4, womit der Induktionsschluß vollzogen wäre.

Aber: Es läßt sich kein Anfangswert k finden, so daß 2 Teiler von $3^k + 4$ wäre ! q.e.d.

6) Beweise, daß gilt: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$ *Hinweis*: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

1. Induktionsanfang : $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\cdot 0!} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1 = 2^0$, daher gilt A(0) .

2. Induktionsschluß von k auf k+1 :

Zu zeigen ist: Wenn A(k) gilt, so gilt auch A(k+1) , d.h. :

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \ldots + \binom{k}{k} = 2^k \Rightarrow \binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \ldots + \binom{k+1}{k+1} = 2^{k+1}$$

Beweis: Induktionsannahme: Es gelte A(k) , d.h. $\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \ldots + \binom{k}{k} = 2^k$.

Dann folgt:

$$\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \ldots + \binom{k+1}{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} =$$

$$\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} = 1 + 1 + \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} =$$

$$1 + 1 + \sum_{i=1}^{k} \left[\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} \right] = 1 + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i-1} + 1 =$$

$$1 + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \ldots + \binom{k}{k} + \quad \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \ldots + \binom{k}{k-1} + 1 =$$

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \ldots + \binom{k}{k} + \quad \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \ldots + \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} =$$

$$2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

q.e.d.

Weitere Übungen:

1) $2^n > n^3$ für $n \geq 10$

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

3) $1^2 - 2^2 + 3^2 -+ \ldots + (-1)^{n-1} * n^2 = (-1)^{n-1} * 0{,}5n(n+1)$

4) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

5) Beweise durch vollständige Induktion sowie durch äquivalente Umformung: $4n \leq n^2 + 4$

6) Zeige, daß der Induktions<u>schluß</u> durchführbar ist, die Formel jedoch für alle $n \in \mathbb{N}^*$ falsch ist !!

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

7) $\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

8) $\sum_{i=0}^{n-1} x^i = \frac{x^n - 1}{x - 1}$, *falls* $x \neq 1$

Schließe daraus: $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} x^i = \frac{1}{1-x}$, *falls* $|x| < 1$

Was gilt für die folgende Summe: $0{,}5^0 + 0{,}5^1 + 0{,}5^2 + 0{,}5^3 + \ldots$ (unendliche viele Summanden) ?
Berechne zunächst bis zum Summanden $0{,}5^{10}$!

9) $(1+a)^n > 1 + n \cdot a$ für $n \geq 2$ und $a \neq 0$ und $a > -1$ <u>Bernoullische Ungleichung</u>

10) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ (Die Produktregel sei vorausgesetzt !)

11) a) Schreibe die Terme $\binom{k}{i}$ in Tabellenform auf für $k = 0$ bis $k = 4$ und jeweils $i = 0$ bis $i = k$.

Beweise damit die folgende Beziehung: $\binom{k+1}{i} = \binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}$

b) Beweise dann mittels vollst. Ind. den sog. BINOMISCHEN LEHRSATZ:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i, wobei \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$