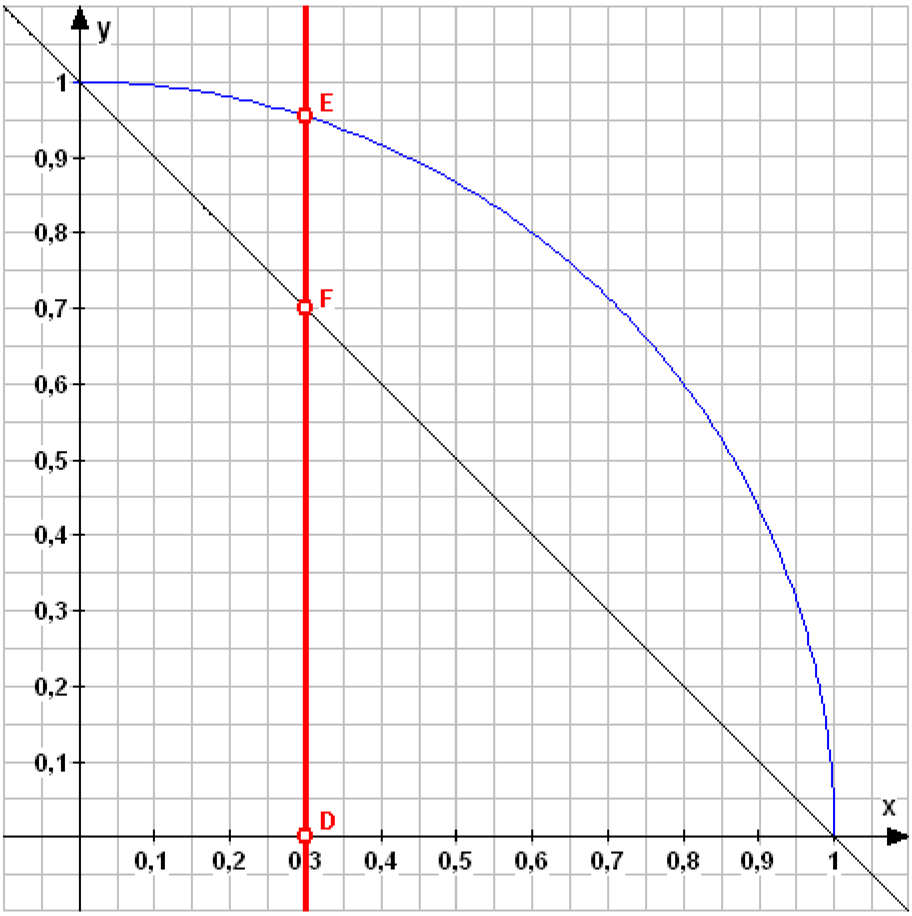
Wurzelfunktionen – Extrema – Bernoulli   Ac

Im Jahre 1699 schrieb Marquis de L'Hospital das erste Lehrbuch zur Differenzialrechnung. Es enthielt auch den Manuskript-Nachdruck einer Vorleseung, die Johann Bernoulli im Jahre 1691 gehalten hatte. Darin findet man sinngemäß folgende Aufgabe:

a) Für welche Lage von D hat die Strecke EF die größte Länge ?

b) Für welche Lage von D hat das Rechteck mit den Seiten DF und EF den größten Flächeninhalt ?



Hinweis:
Überlege zunächst, wie man die gesuchten Streckenlängen in Abhängigkeit von x ausdrückt .

Lösungen:

Für die Punkte gilt: D(x/0), E(x/ $\sqrt{1-x^2}$), F(x/1-x)

a) $d(x) = \left|\overline{EF}\right| = \sqrt{1-x^2} - (1-x) = \sqrt{1-x^2} + x - 1$.

$d'(x) = 0{,}5(1-x^2)^{-0{,}5} \cdot (-2x) + 1 = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$d'(x) = 0 \Rightarrow 0 = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ und somit $x = \sqrt{1-x^2}$. <u>Lösung:</u> $x = \sqrt{0{,}5}$.

Auf das hinr. Krit. sei hier verzichtet .

b) $e(x) = \left|\overline{DF}\right| \cdot \left|\overline{EF}\right| = (1-x) \cdot (\sqrt{1-x^2} + x - 1)$

$e'(x) = (1-x) \cdot (1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}) - (\sqrt{1-x^2} + x - 1)$

$= 1-x- \dfrac{x-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} -x + 1$

$= 2(1-x) - \dfrac{x-x^2+1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 2(1-x) - \dfrac{x-2x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \dfrac{2(1-x)\sqrt{1-x^2} - x + 2x^2 - 1}{\sqrt{1-x^2}}$

$e'(x) = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{2(1-x)\sqrt{1-x^2} - x + 2x^2 - 1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow 0 = 2(1-x)\sqrt{1-x^2} - x + 2x^2 - 1$

$\Rightarrow 2(1-x)\sqrt{1-x^2} = x + 1 - 2x^2$

$\Rightarrow 4(1-x)^2 \cdot (1-x^2) = (x + 1 - 2x^2)^2$

$\Rightarrow (4 - 8x + 4x^2) \cdot (1-x^2) = x^2 + x - 2x^3 + x + 1 - 2x^2 - 2x^3 - 2x^2 + 4x^4$

$\Rightarrow 4 - 8x + 4x^2 - 4x^2 + 8x^3 - 4x^4 = x^2 + x - 2x^3 + x + 1 - 2x^2 - 2x^3 -2x^2 + 4x^4$

$\Rightarrow 4 - 8x + 8x^3 - 4x^4 = -3x^2 + 2x - 4x^3 + 1 + 4x^4$

$\Rightarrow 3 - 10x + 3x^2 +12x^3 - 8x^4 = 0$

Nummerische Lösung: x = 0,411437…

DERIVE: $\dfrac{\sqrt{7} - 1}{4}$