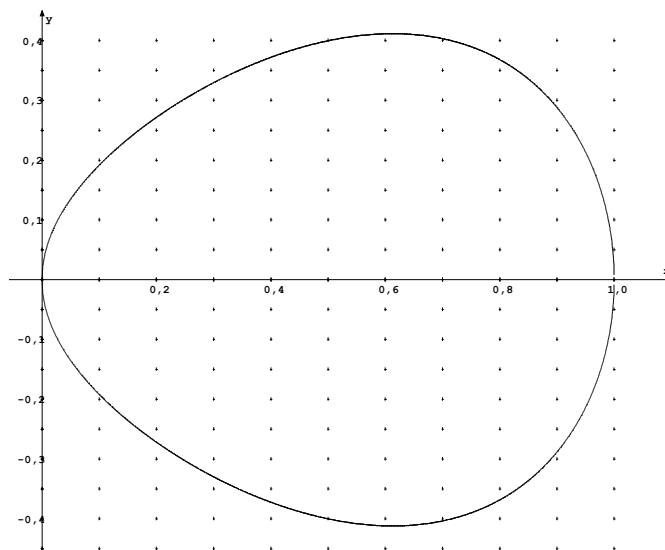


Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x) = (0,4x + 0,6) \cdot \sqrt{x - x^2}$$

a) Gib den Definitionsbereich D_f an (d.h. in welchem Intervall ist f definiert ?) und bestimme durch exakte Rechnung die Nullstellen.

b) Durch Rotation von G_f um die x -Achse entsteht ein kleines Ei. Berechne sein Volumen V . (Exakter Integralansatz erforderlich; dann mit fnInt approximativ lösen)



c) Für die Ableitungen gilt: $f'(x) = \frac{3 - 8x^2}{10\sqrt{x - x^2}}$. und $f''(x) = \frac{16x^3 - 24x^2 + 6x - 3}{20(x - x^2)\sqrt{x - x^2}}$.

Bestimme mit Hilfsmitteln der Kurvendiskussion exakt die rel. Maximalstelle von f .

d) Leite die Formel für f' her .

Lösungen:

a) Der Definitionsbereich ist $D_f = [0;1]$.

Er ergibt sich aus der Bedingung $x-x^2 \geq 0$ ($g(x) = x-x^2$ ist grafisch eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen 0 und 1. Nur im Intervall $[0;1]$ ist g also ≥ 0).

b) Das Volumen ist $V = \pi \cdot \int_0^1 (0,4x + 0,6)^2 (x - x^2) dx \approx 0,339 VE$ (mit fnInt)

c) Rel.Extrema: $f'(x) = 0$, also $3 = 8x^2$, wobei wegen des Nenners $x > 0$ und $x \neq 1$.

Es folgt $x = \sqrt{\frac{3}{8}} \approx 0,61$

$f''(\sqrt{\frac{3}{8}}) \approx -2,01$ (mit GTR approximativ berechnen)

Es handelt sich daher um einen rel. Hochpunkt.

d) Erste Ableitung berechnen mit Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((0,4x + 0,6) \cdot \sqrt{x - x^2})' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' = \\ &0,4 \cdot \sqrt{x - x^2} + (0,4x + 0,6) \cdot \frac{1}{2} (x - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - 2x) = \\ &0,4 \cdot \sqrt{x - x^2} + \frac{(0,2x + 0,3) \cdot (1 - 2x)}{\sqrt{x - x^2}} = \\ &\frac{0,4 \cdot \sqrt{x - x^2}^2 + (0,2x + 0,3) \cdot (1 - 2x)}{\sqrt{x - x^2}} = \frac{0,4 \cdot (x - x^2) + (0,2x + 0,3) \cdot (1 - 2x)}{\sqrt{x - x^2}} = \\ &\frac{0,3 - 0,8x^2}{\sqrt{x - x^2}} = \frac{3 - 8x^2}{10\sqrt{x - x^2}} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$