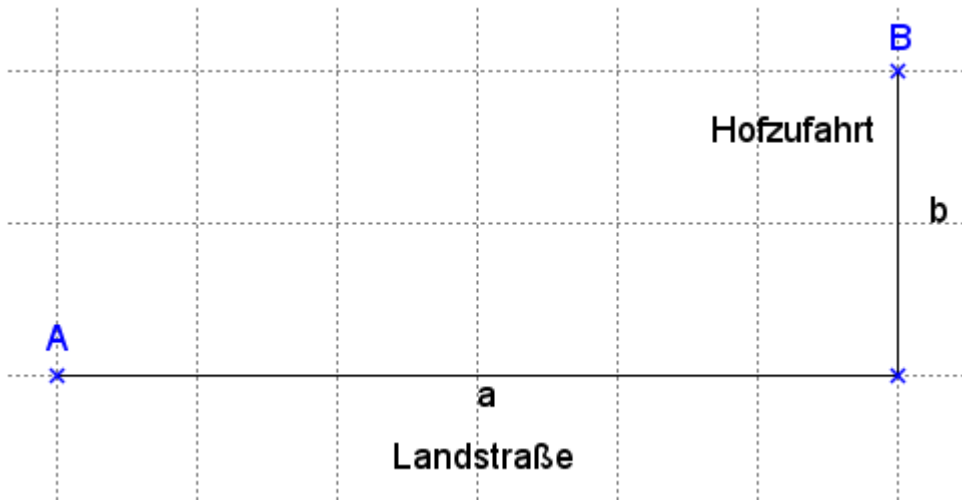


## Aufgabe:

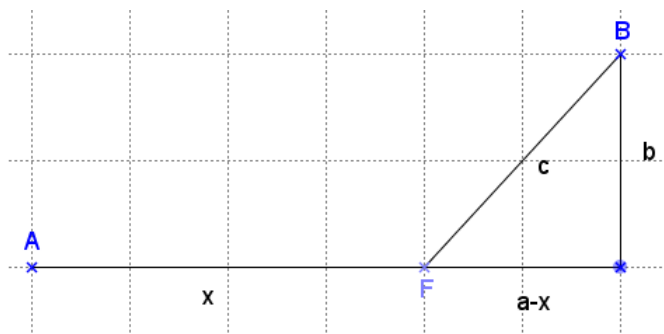


Vom Hof A aus soll zum Hof B eine Telefonleitung gelegt werden.

Nur entlang der Landstraße ist eine Freileitung über Masten möglich (Kosten: 30000€ pro km), ansonsten ist ein Erdkabel geplant (Kosten: 110000€ pro km). Die bautechnischen Vorschriften sehen eine Leitungsführung über die Landstraße und nach einer rechtwinkligen Abzweigung entlang der Hofzufahrt vor.

Wie viel % der Kosten könnte man einsparen, wenn man den Abzweigungspunkt beliebig wählen und das Erdkabel quer durch die Felder verlegen könnte ?

## Allgemeine Lösung (mit Parametern):



Wählt man den Abzweigpunkt F beliebig auf der Landstraße, so gilt für die gesamte Strecke:

$$s(x) = x + \sqrt{(a-x)^2 + b^2}$$

wobei  $a, b > 0$  vorausgesetzt

Die Kosten (in €) betragen dann:

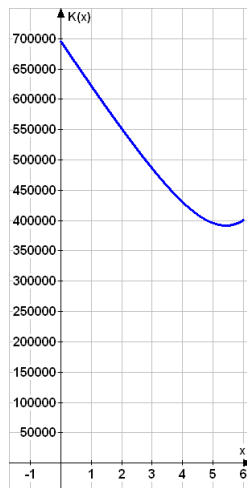
$$K(x) = 30000x + 110000\sqrt{(a-x)^2 + b^2} \quad ; \quad x \in [0; 6]$$

Beispiel:  $a=6; b=2$   
siehe Grafik

Die Kostenfunktion ist hier speziell:

$$K(x) = 30000x + 11000\sqrt{(6-x)^2 + 4}$$

Minimum vermutlich bei  $x \approx 2,4$



Man kann vermuten, dass das Minimum bei diesem Beispiel an der Stelle 5,5 liegt, also ziemlich nahe an der Hofeinfahrt.

Gesucht ist das Kostenminimum. Daher bilden wir  $K'(x)$  und setzen es  $= 0$ .

$$\text{Ohne Nachweis gelten: } K'(x) = 30000 - \frac{110000(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} \quad K''(x) = \frac{110000b^2}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}^3}$$

Ansatz (notwendiges Kriterium für rel. Extremstellen):

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow 30000 = \frac{110000(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} \quad \text{Es folgen: } \frac{3}{11} = \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{11}{3}(a-x) = \sqrt{(a-x)^2 + b^2} \quad \text{Nur für } a \geq x, \text{ d.h. } x \leq a \text{ ist dazu äquivalent:}$$

$$\frac{121}{9}(a-x)^2 = (a-x)^2 + b^2 \Leftrightarrow \frac{112}{9}(a-x)^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-x)^2 - \frac{9}{112}b^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2ax + a^2 - \frac{9}{112}b^2 = 0$$

$$\text{Die Lösungen sind: } x_{1,2} = a \pm \sqrt{\frac{9}{112}b^2} \quad \text{bzw.} \quad x_{1,2} = a \pm \frac{3b}{\sqrt{112}}$$

Wegen der Einschränkung  $x \leq a$  kommt nur die Lösung  $x_1 = a - \frac{3b}{\sqrt{112}}$  in Betracht!

Die Probe (durch Einsetzen) liefert in der Tat  $K'(a - \frac{3b}{\sqrt{112}}) = 0$ .

Mittels  $K''(a - \frac{3b}{\sqrt{112}}) > 0$  lässt sich hier ein lokales Minimum nachweisen.

Beispielsweise ermittelt DERIVE:  $K''(a - \frac{3b}{\sqrt{112}}) = \frac{4480000 \cdot \sqrt{7}}{121 \cdot |b|} > 0$

Also ist  $x_{\min} = a - \frac{3b}{\sqrt{112}}$  eine lokale Minimalstelle !

Für das Beispiel mit  $a=6$  und  $b=2$  ergibt sich der Näherungswert 5,433 .  
Dies steht auch im Einklang mit der grafischen Darstellung .

Jetzt muss noch der Funktionswert (das Minimum) berechnet werden:

$$K(a - \frac{3b}{\sqrt{112}}) = \frac{302500}{\sqrt{7}} \cdot |b| + 7500 \cdot (4a - 3b)$$

Wegen  $b > 0$  entfällt der Betrag und man erhält:  $\text{Min} := 30000 \cdot a + 40000 \cdot \sqrt{7} \cdot b$

Für das Beispiel mit  $a=6$  und  $b=2$  erhalten wir:  $\text{Min} = 180000 + 80000 \cdot \sqrt{7} \approx \underline{\underline{391660,10 \text{ €}}}$

Die minimalen Kosten betragen daher ca. 391660,10 € .

( Der Umweg kostete übrigens  $6 \cdot 30000 \text{ €} + 2 \cdot 110000 \text{ €} = 400000 \text{ €}$  )

Zur Berechnung der prozentualen Einsparung muss man das Verhältnis von Min zu den ursprünglichen Kosten, nämlich  $30000 \cdot a + 110000 \cdot b$  , bilden :

$$\text{Verhältnis } V(a;b) = \frac{30000 \cdot a + 40000 \cdot \sqrt{7} \cdot b}{30000 \cdot a + 110000 \cdot b}$$

$$\text{Dann ist } V(6;2) = \frac{180000 + 80000 \cdot \sqrt{7}}{180000 + 220000} = \frac{180000 + 80000 \cdot \sqrt{7}}{400000} = \frac{9}{20} + \frac{\sqrt{7}}{5} \approx 0,979 = 97,9\%$$

(Einsparung durch die neue Streckenführung also „nur“ ca. 2% ! )

Anmerkung: Für das Beispiel kann man auch die Daten von oben verwenden:  $\frac{391660,10}{400000} \approx 0,979$