Die Kurvenschar m.d.Gl. $f_k(x) = x \cdot e^{kx}$; $k \neq 0$

Nullstellen :

Aus $f_k = 0$ folgt $\underline{x = 0}$ für alle k .

Ableitungen:

$\mathbf{f_k'(x) = (kx + 1) \cdot e^{kx}}$ $\mathbf{f_k''(x) = k \cdot (kx + 2) \cdot e^{kx}}$ $\mathbf{f_k'''(x) = k^2 \cdot (kx + 3) \cdot e^{kx}}$

Rel. Extrema:

Aus $f_k' = 0$ folgt $\underline{x = -1/k}$ für alle k .

Wegen $f_k''(-1/k) = k(-1+2) \cdot e^{-1} = k \cdot e^{-1}$ sind die $x_k = -1/k$ rel. Maximalstellen für $k < 0$ und rel. Minimalstellen für $k > 0$. T_k bzw. H_k ($-1/k$; $-1/(k \cdot e)$)

Wendestellen:

Aus $f_k'' = 0$ folgt $\underline{x = -2/k}$ für alle k .

Wegen $f_k'''(-2/k) = k^2(-2+3) \cdot e^{-2} = k^2 \cdot e^{-2} \neq 0$ sind die $x_k = -2/k$ Wendestellen. W_k ($-2/k$; $-2/(ke^2)$)

Ortskurven:

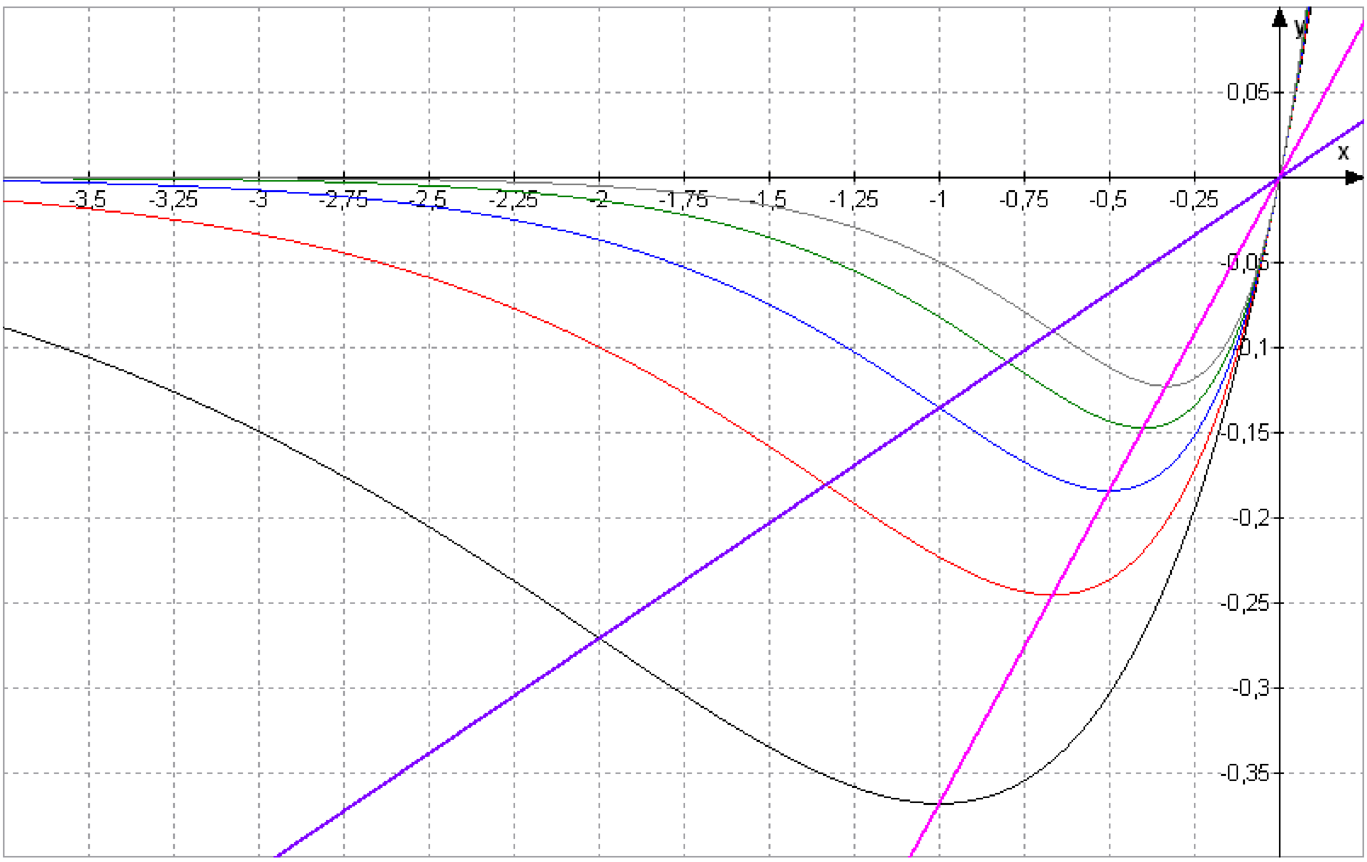
Für die Extrempunkte gilt: $x = -1/k$, also $k=-1/x$. Einsetzen in $y=-1/(k \cdot e)$: $y=-1/(-1/x \cdot e)=-1/(-e/x) = x/e$

Die Extrempunkte liegen also alle auf der Geraden mit $y = \frac{1}{e}x$

Für die Wendepunkte gilt: $x = -2/k$, also $k=-2/x$. Einsetzen in $y=-2/(k \cdot e^2)$: $y=-2/(-2/x \cdot e^2) = x/e^2$

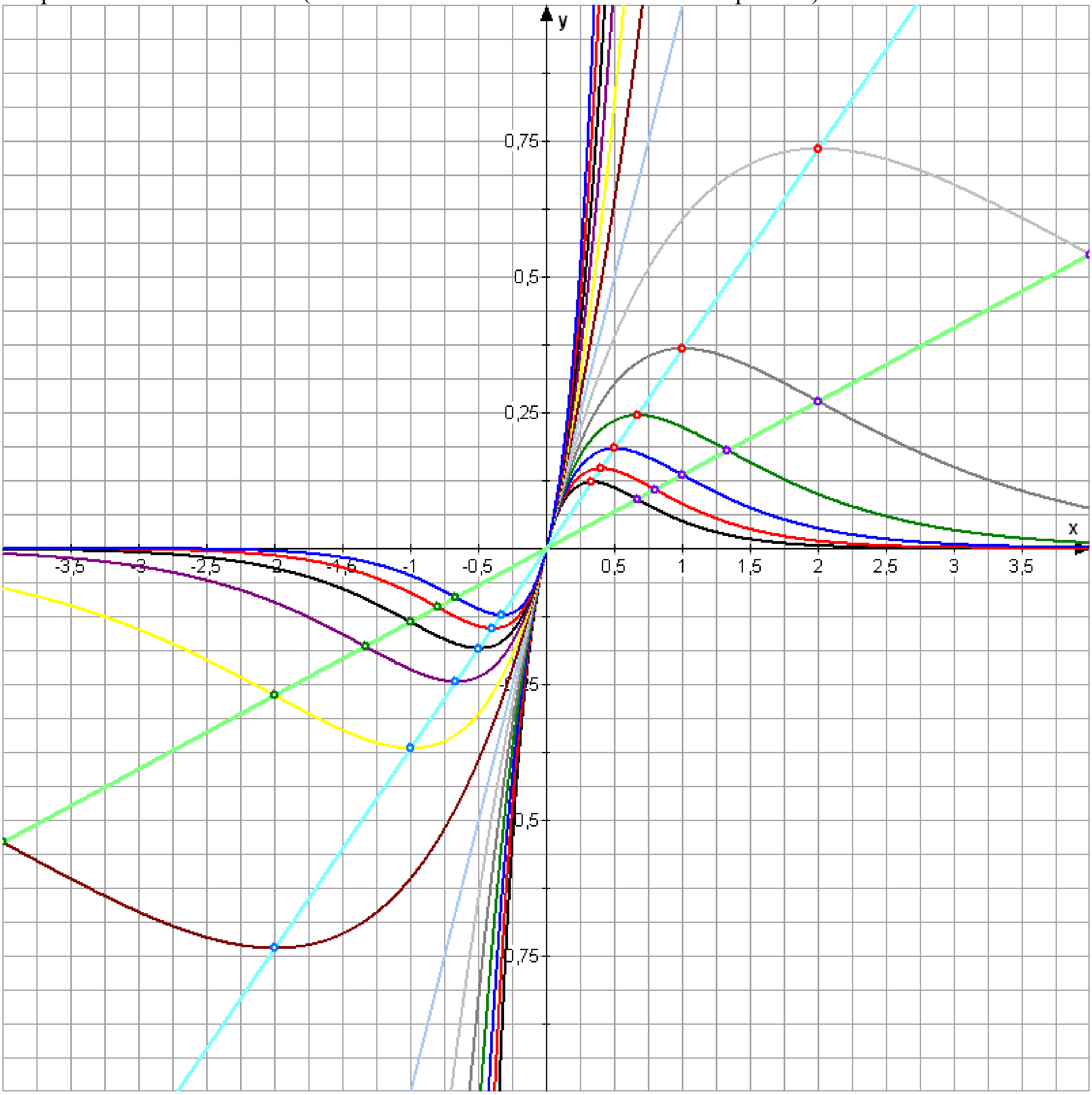
Die Wendepunkte liegen also alle auf der Geraden mit $y = \frac{1}{e^2}x$

Graphen: (hier nur für k > 0 betrachtet ; inclusive der Ortskurven)



Aufgabe: Schreibe an jede Kurve den betreffenden k-Wert; markiere auch die Extrem- und Wendep.

Graphen für k > 0 und k < 0 (incl. Ortskurven der Extrem- und Wendepunkte)



Erweiterung:

Flächenberechnung zwischen x-Achse und Graph von f_k (eingeschlossene Fläche):

$$\int x \cdot e^{kx}\, dx = \left(\frac{x}{k} - \frac{1}{k^2}\right) \cdot e^{kx}$$

Wegen $x \to -\infty$ tritt hier ein sog. „uneigentliches“ Integral auf !

Beispiel k = 1: $A = -\int_{-\infty}^{0} x \cdot e^{x}\, dx = \left[-\left(\frac{x}{1} - \frac{1}{1^2}\right) \cdot e^{x} \right]_{-\infty}^{0} = 1$

Beispiel k = -2: $A = \int_{0}^{\infty} x \cdot e^{-2x}\, dx = \left[\left(\frac{x}{-2} - \frac{1}{(-2)^2}\right) \cdot e^{-2x} \right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{4}$