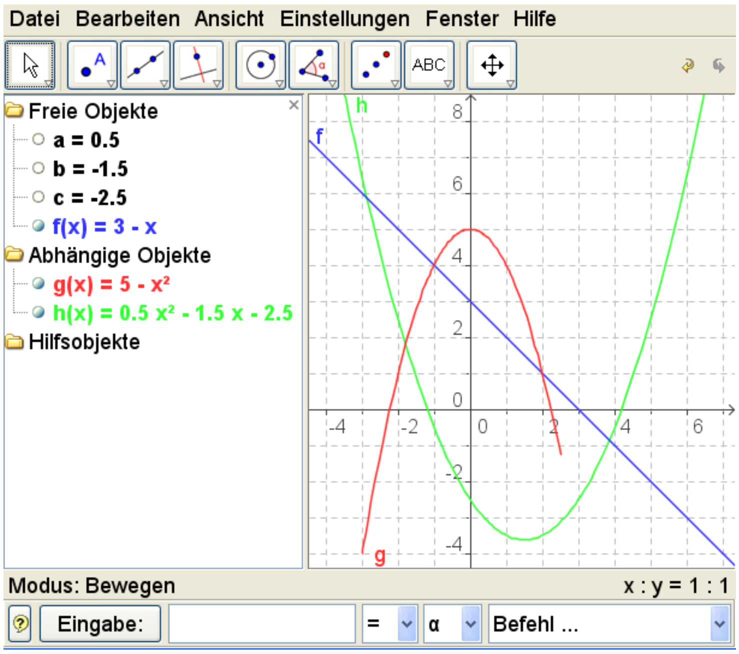
Anleitung zu **GEOGEBRA** 3.0 von Ac

I. Algebraische Fähigkeiten:

① Funktionen und Umkehrrelationen :

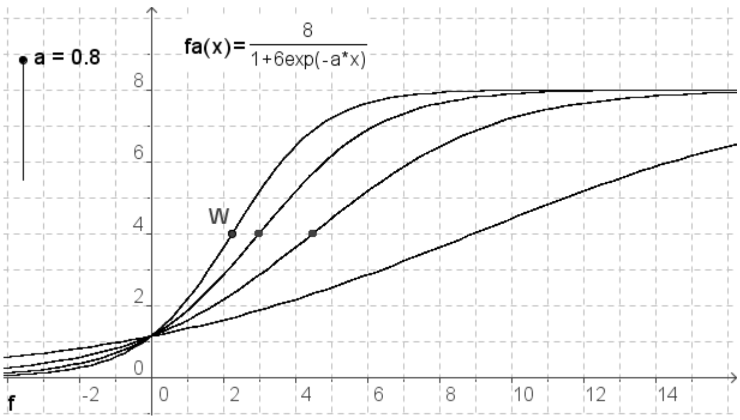
Verarbeitet werden Funktionen, abschnittsweise def. F., Relationen (nur als Ortslinie, nicht als Term), Funktionenscharen, parametrisierte Funktionen bzw. Relationen (x(t),y(t)), Folgen .

<u>Funktionen</u> gibt man anhand ihres Terms ein, z.B. 3-x oder **f(x)=3-x** .
Fehlt der Funktionsname, so wird er von GeoGebra zugewiesen (im Algebrafenster) .
Achtung !
Definiert man y=3-x statt f(x)=3-x , so erzeugt GeoGebra ein <u>geometrisches</u> Objekt, das als Gerade erkannt wird und z.B. nicht abgeleitet werden kann, z.B.: d: y=-x+3



<u>Abschnittsweise</u> definierte Funktionen erzeugt man z.B. mit **funktion**[5-x²,-3,2.5] .

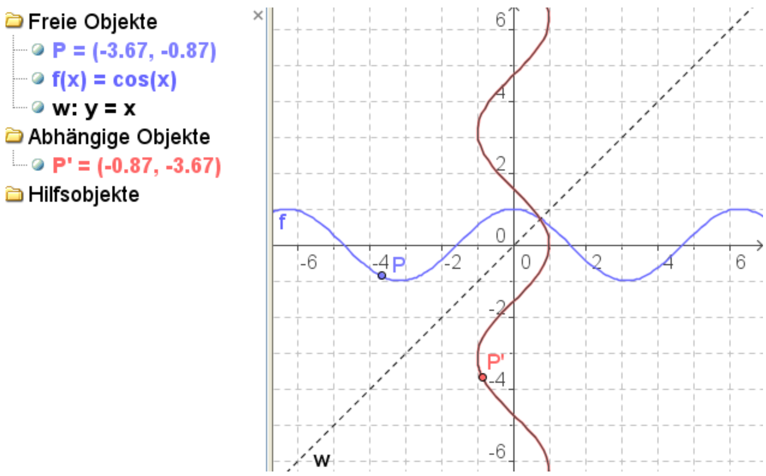
<u>Funktionen mit Formvariablen (Animation):</u>
Die Anweisungsfolge
a=0.5 b=-1.5 c=-2.5 f(x)=a*x²+b*x+c
erzeugt zunächst eine spezielle Funktion. Nun können a, b, c variiert werden, entweder im Algebrafenster (Doppelklick auf die Zahl und ändern) oder durch Schieberegler.



<u>Funktionenscharen:</u>
Mit Schieberegler Parameter erzeugen.
Dann für die Funktion f im Kontextmenü „Spur an“ markieren. Voilà !
Zusätzlich kann man noch Wendepunkte o.ä. darstellen mit „Trick“:
NW=nullstelle[f ”,3]   (x_W mit Newton !)
W=(x(NW),f(x(NW)))   (WP mit f ”=0)
Dann wieder „schieben“ .

<u>Umkehrrelation:</u>
Diese wird als Ortslinie konstruiert, am besten mithilfe von Befehlen und nicht durch manuelle Konstruktion ! Anschließend kann sogar f umdefiniert werden und man erhält automatisch neue Ortslinien :

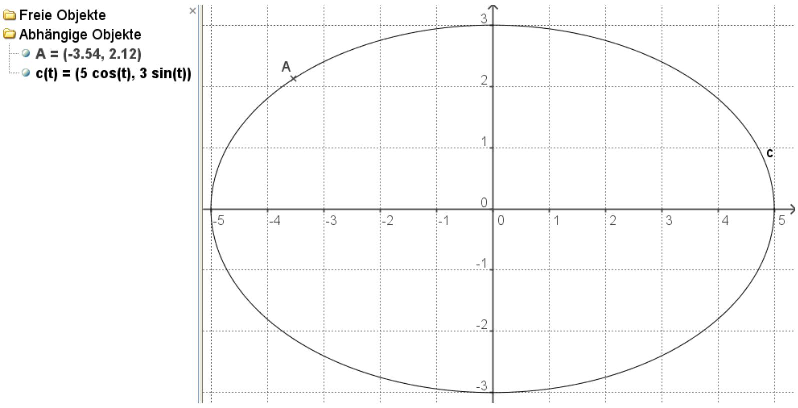
P=punkt[f]
w: y=x
P’=spiegle[P,a]
ortslinie[P’,P]



<u>Parameterkurven:</u>
c=Kurve[x(t),y(t),t,a,b] definiert und zeichnet eine Kurve im Bereich [a;b].

Beispiel: c=Kurve[5cos(t),3sin(t),t,0,2pi] definiert eine Ellipse mit den Halbachsen5;3.

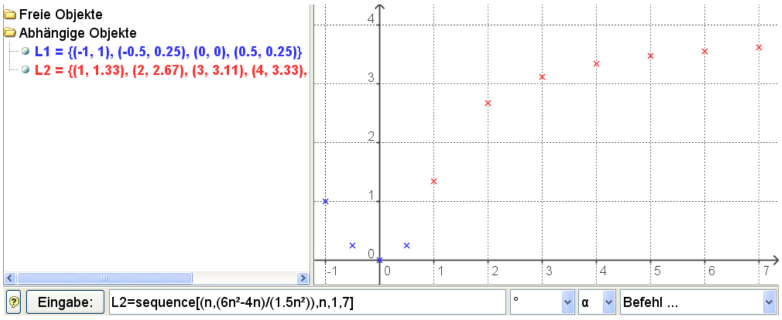
A=c(3pi/4) liefert den Punkt A(5cos(.75π),3sin(.75π))



<u>Folgen:</u>
L=Folge[Liste,Variable,von,bis,Schritt] definiert eine Folge bzw. Liste.
Schritt ist optional.

Beispiele:
L1=Folge[(i,i²),i,-1,0.5,0.5] liefert
L1={(-1,1),(-.4,.25),(0,0),(.5,.25)}

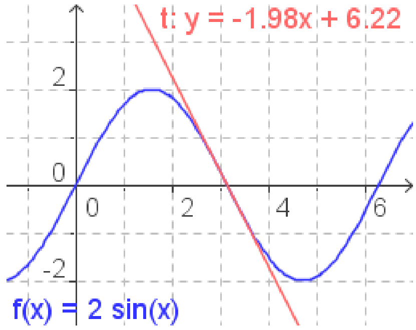
L2=Folge[(n,(6n²-4n)/(1.5n²)),n,1,7] liefert
L2={(1,1.33),(2,2.67),(3,3.11), …}



② Ableitung, Tangente, Steigung, Krümmung:

Die Ableitungsfunktionen einer Funktion f werden mittels **f '(x)** bzw. **f ''(x), f '''(x)** etc. berechnet.
Alternativ sind auch die Anweisungen **ableitung[f]** bzw. **ableitung[f,2]** etc. erlaubt.
Beispiele: f(x)=sin(x) gegeben. f '''(x) liefert -cos(x) . f '(π) liefert -1 .

Tangente an eine Funktion zeichnen:



Beispiel: a = 3 f(x) = 2 sin(x)
t = **tangente[a, f]** oder einfach tangente[3,f]
liefert die Tangentengleichung von t (approximativ).

Möglich ist auch: **tangente[(5,1),f]**
verwendet nur den x-Wert des Punktes (5,1) und bildet dann (5,f(5)) !

Die Steigung einer Geraden wird mit **Steigung[Gerade]** ermittelt.
Dieser Befehl zeichnet auch das Steigungsdreieck, welches in seiner Größe veränderbar ist .

Die Krümmung einer Funktion (oder parametrisierten Kurve) wird ermittelt durch
Krümmung[Punkt, Funktion] .
Beispiele: krue= Krümmung[((pi/2,1), sin(x)] liefert krue=-1.
Einen Kreis mit k=curve[2+3cos(t),4+3sin(t),t,0,2pi] definieren und:
krue2= Krümmung[(5,4), k] liefert krue2=0.33. Dies ist der Kehrwert des Radius !

③Integral,Flächeninhalt :

Das unbestimmte Integral (Stammfunktion F) von f wird mittels **integral[f]** berechnet .
Beispiel: **Z=integral[cos(x)]** liefert Z(x)=sin(x) .
Achtung: Es werden nur einfache Stammfunktionen ermittelt, z.B. exp(x) →exp(x), 1/x → log(x), cos(3x) → sin(3x)/3 und $-4/x^3 \rightarrow 2/x^2$, nicht jedoch exp(5x) →undefiniert .

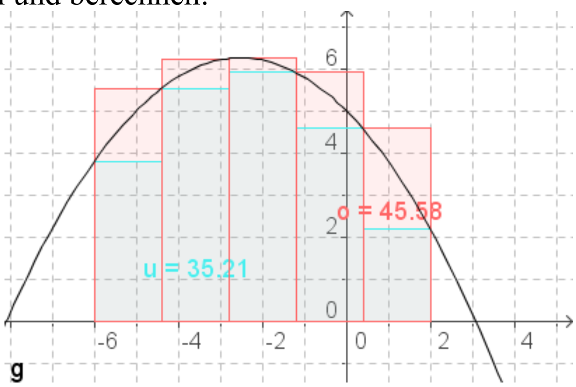
Bestimmte Integrale berechnet GeoGebra durch zusätzliche Eingabe der Grenzen.
Gleichzeitig wird auch die zwischen f und x-Achse gelegene Fläche gezeichnet.
Erweiterung: **integral[f,g,a,b]** schraffiert die Fläche und berechnet das Integral zu f - g in [a;b].
Beispiele: **integral[exp(x),-1,3]** liefert 19.72 und schraffiert die betreffende Fläche .
integral[2-x,x²,1,4] liefert -22.5 .
Achtung: Das Ergebnis für ein bestimmtes Integral ist immer eine Approximation !

Unter- und Obersummen einer Funktion lassen sich zeichnen und berechnen:

Beispiel: $g(x)=5-x-0.2x^2$ a = -6 b = 2 n = 5

u=**untersumme[g, a, b, n]** berechnet 35.21 .

o=**obersumme[g, a, b, n]** berechnet 45.58 .



Flächeninhalt **geradlinig** begrenzter Flächen:

Eine von mehreren Punkten begrenzte Fläche wird z.B. so berechnet:
fläche[(-2.83,0),(0,8),(-2.83,0)] liefert die Zahl 22.64 (Inhalt der Dreiecksfläche).
An Stelle der Punkte kann auch ein vorher mittels **Vieleck** definiertes Objekt verwendet werden.

④“Kurvendiskussion“ - Nullpunkte, Extrempunkte, Wendepunkte etc.:

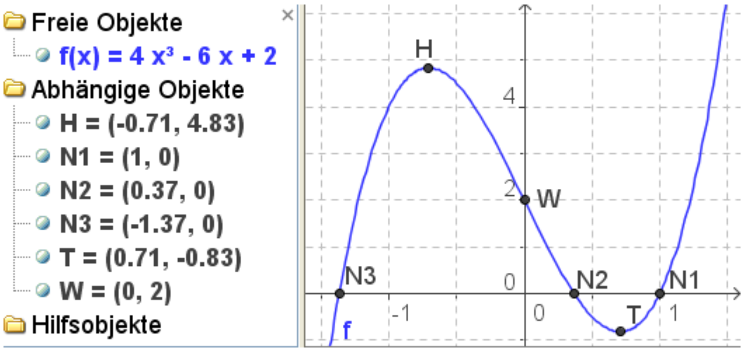
Auch diese Punkte werden wie Integrale numerisch gebildet .

Die Befehle lauten **nullstelle[f]** , **extremum[f]** und **wendepunkt[f]** .

Achtung: Die Befehle nullstelle[f], extremum[f] und wendepunkt[f] funktionieren nur bei Polynomen ! Will man Nullstellen von beliebigen Funktionen bestimmen, so können diese mit **nullstelle[f,x0]** nach dem **Newton-Verfahren** bestimmt werden mit Startwert x0. Alternativ kann die **„regula falsi“** verwendet werden: **nullstelle[f,a,b]** mit Startintervall [a;b] .

Beispiel Kurvendiskussion: $f(x)= 4x^3-6x+2$

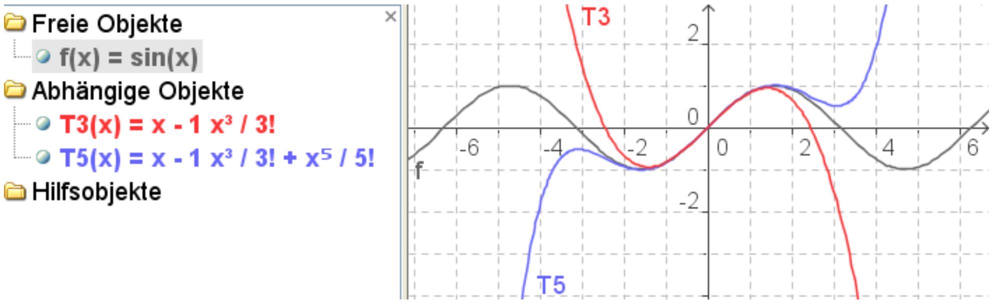
Die Befehle nullstelle[f], extremum[f] und wendepunkt[f] liefern 5 Punkte (s.Grafik).
Anm.: Die Bezeichnungen N_1, H, W etc. wurden manuell vorgenommen.



Extrempunkte und Wendepunkte von beliebigen Funktionen können derzeit Vers.2.7) nicht direkt bestimmt werden, aber es geht mit einem Trick:
Extremum über Nullstelle von f ’ bestimmen (Newtonverfahren) !
Ebenso Wendepunkt über Nullstelle von f ” bestimmen .
Streng genommen müssten dann noch die höheren Ableitungen überprüft werden .
Beispiel: nullstelle[sin(x),3] liefert A(3.14,0)
nullstelle[ableitung[sin(x)],2] liefert B(1.57,0)
nullstelle[ableitung[sin(x),2],-3] liefert C(-3.14,0)

⑤Taylorpolynom, Polynom, Asymptote:

Der Befehl **Taylorpolynom[f,a,n]** erzeugt das Taylorpolynom der Funktion f um die Stelle x=a der Ordnung n . Beispiel (siehe Grafik):



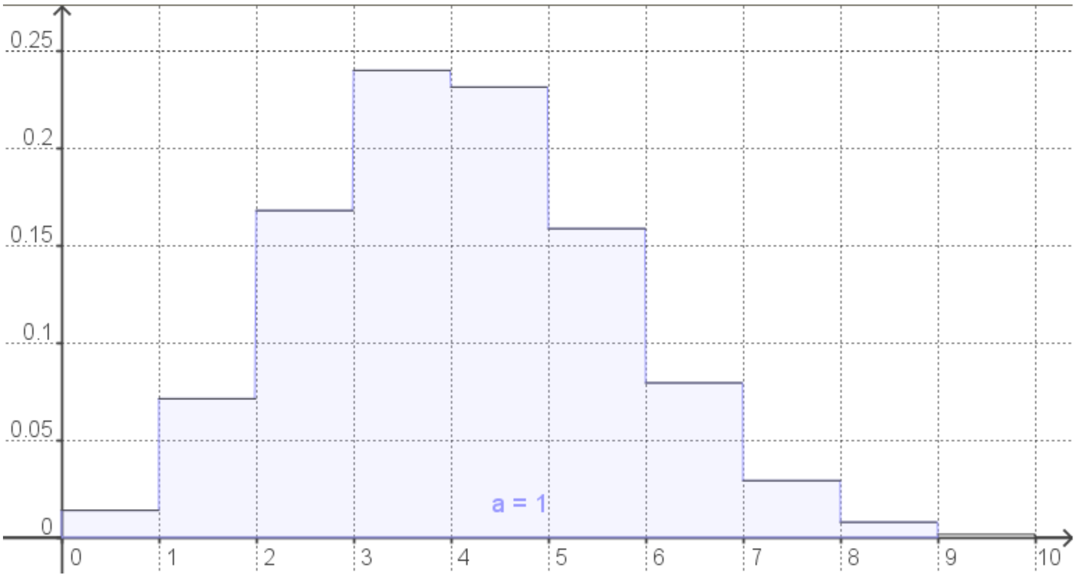
Zusätzliche Befehle:

Polynom[f] liefert die ausmultiplizierte Polynomfunktion zu f.
Beispiel: **Polynom[(x - 3)²]** liefert $x^2 - 6x + 9$

Asymptote[Hyperbel c] liefert beide Asymptoten einer Hyperbel

Stochastik mit GeoGebra ist derzeit nur eingeschränkt möglich !

Zuerst muss man die beiden Variablen n und p definieren, damit man später darauf zurückgreifen kann .
n=12
p=0.3
binkoeff(x)= n!/(n-floor(x))!/floor(x)!
binvert(x)=binkoeff(x)*p^floor(x)*(1-p)^(n-floor(x))
wobei floor(x) die Gaußklammerfunktion und ! die Fakultät sind.
Mittels Integral[binvert,0,n] kann man sogar noch die Fläche (=kumulierte Wahrsch.) berechnen.



Ungleich schwieriger lässt sich die Hypergeometrische Verteilung darstellen, da man 3 verschiedene Binomialkoeffizienten benötigt:

n=12
M=30 N=100
bink1(x) = M! / (M - floor(x))! / floor(x)!
bink2(x) = (N - M)! / (N - M - (n - floor(x)))! / (n - floor(x))!
bink3=N!/(N-n)!/n!
hypergeo(x)=bink1(x)/bink3*bink2(x)