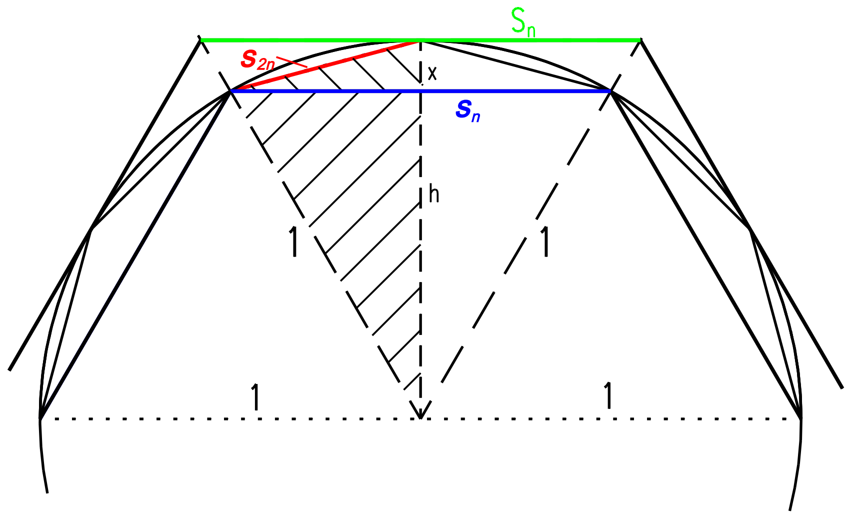
Archimedes-Methode zur Approximation von π

Dem Einheitskreis mit Radius 1 werden nacheinander 6-Eck, 12-Eck, 24-Eck usw. einbeschrieben und umbeschrieben (Zeichnung).

Der <u>halbe Umfang</u> des n-Ecks ist dann eine Approximation für den halben Umfang des Einheitskreises, nämlich

$U/2 = \pi$



<u>Genauere Betrachtung:</u>
Bezeichnet man mit s_n die Seite des einbeschriebenen n-Ecks und mit S_n die Seite des umbeschriebenen n-Ecks , so gelten für die Umfänge die Formeln :

(1) $I_n = n \cdot s_n$ (Umfang des inneren n-Ecks)	(2) $A_n = n \cdot S_n$ (Umfang des äußeren n-Ecks)

Da der Einheitskreis einen Umfang von $U = 2\pi$ besitzt (wegen r = 1), gilt also $\frac{U}{2} = \pi$.

Aus diesem Grund sind die <u>halben Umfänge</u> der n-Ecke Näherungswerte für π !

Daraus ergibt sich folgende Ungleichungskette: $\frac{I_n}{2} < \pi < \frac{A_n}{2}$, d.h. $\frac{n}{2} \cdot s_n < \pi < \frac{n}{2} \cdot S_n$

Für das 6-Eck ist bekanntlich $s_6 = 1$, womit aus obiger Ungleichungskette $3 < \pi < 3 \cdot S_6$ folgt .
Wäre S_6 (die Seitenlänge des äußeren 6-Ecks) bekannt, so könnte man die Ungleichungskette vervollständigen . Die erste Aufgabe besteht also darin, S_6 oder besser gleich S_n zu berechnen.
Dies erreicht man am einfachsten, indem man eine Beziehung zwischen s_n und S_n aufstellt .

Hierzu wenden wir den Strahlensatz sowie den Satz des Pythagoras auf obige Figur an:

Pythagoras: $h^2 + (0{,}5s_n)^2 = 1^2$ Dies lässt sich umformen zu: $h^2 = 1 - 0{,}25s_n^2$

Strahlensatz: $\frac{S_n}{s_n} = \frac{x + h}{h}$ und wegen $x + h = 1$: $\frac{S_n}{s_n} = \frac{1}{h}$ sowie $h^2 = \frac{s_n^2}{S_n^2}$

Gleichsetzen der beiden Ergebnisse: $1 - 0{,}25s_n^2 = \frac{s_n^2}{S_n^2}$ und Auflösen der Gleichung nach S_n :

$$4S_n^2 - s_n^2 \cdot S_n^2 = 4s_n^2 \Leftrightarrow S_n^2 \cdot (4 - s_n^2) = 4s_n^2 \Leftrightarrow S_n^2 = \frac{4s_n^2}{4 - s_n^2} \Leftrightarrow S_n = \frac{2s_n}{\sqrt{4 - s_n^2}} \quad (*)$$

Die Ungleichungskette von oben lässt sich jetzt vervollständigen, denn für $n = 6$ ist $s_6 = 1$ (siehe oben)

und damit ergibt sich $S_6 = \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{4 - 1^2}}$, was sich zu $S_6 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ vereinfachen lässt !

Ungleichungskette für das 6-Eck also : $3 < \pi < \frac{6}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \approx 3{,}46$

Eine bessere Einschachtelung für π liefern die halben Umfänge der Zwölfecke , $0,5 \cdot I_{12}$ und $0,5 \cdot A_{12}$.
In der Zeichnung ist die Seitenlänge des inneren 12-Ecks mit s_{2n} bezeichnet. Hätte man dieses s_{2n} berechnet, so könnte man auch $0,5 \cdot I_{12} = 0,5 \cdot 12 \cdot s_{12} = 6 \cdot s_{12}$ berechnen und hätte eine bessere Näherung für π . Das Ziel ist daher jetzt, eine Beziehung zwischen s_{2n} und s_n zu finden !
Nach längerer Rechnung (mit Anwendungen des Pythagoras) ergibt sich die Formel

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \qquad (**)$$

<u>Herleitung dieser Formel:</u>
Es wird der Satz des Pythagoras bei den <u>beiden</u> schraffierten Dreiecken in der Zeichnung angewendet .

1. Dreieck: $h^2 + (0,5s_n)^2 = 1^2 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = 1 - 0,25s_n^2 \quad \Leftrightarrow \quad h = \sqrt{1 - 0,25s_n^2}$

2. Dreieck: $x^2 + (0,5s_n)^2 = s_{2n}^2 \quad \Leftrightarrow \quad (1-h)^2 + 0,25s_n^2 = s_{2n}^2$

Wir setzen jetzt die Formel für h in die 2.Gleichung ein und erhalten:

$$s_{2n}^2 = (1 - \sqrt{1 - 0,25s_n^2})^2 + 0,25s_n^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1 - 0,25s_n^2} + (\sqrt{1 - 0,25s_n^2})^2 + 0,25s_n^2$$

Dies lässt sich umformen zu : $s_{2n}^2 = 1 - 2 \cdot \sqrt{1 - 0,25s_n^2} + 1 - 0,25s_n^2 + 0,25s_n^2 = 2 - 2 \cdot \sqrt{1 - 0,25s_n^2}$

Bringt man den Faktor 2 noch in die Wurzel, so erhält man $s_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_n^2}$, woraus (**) folgt !

Aus der Formel (**) kann man nun s_{12} errechnen:

$$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_6^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 0,5176$$

Multipliziert man das Ergebnis mit der halben Seitenzahl (also mit 6), so ergibt sich als neue (zu kleine) Näherung für π der gerundete Wert 3,106 .

Die entsprechende äußere Seitenlänge S_{12} lässt sich wieder mit Formel (*) ermitteln :

$$S_{12} = \frac{2 \cdot s_{12}}{\sqrt{4 - s_{12}^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{4 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{4 - (2 - \sqrt{3})}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} \approx 0,5359$$

Multipliziert man das Ergebnis mit der halben Seitenzahl (also mit 6), so ergibt sich als neue (zu große) Näherung für π der gerundete Wert 3,215 .

Wir haben also bisher folgende Schachtelung erhalten:
$3 < \pi < 3,46$
$3,106 < \pi < 3,215$

Den Rest soll der Computer mittels Tabellenkalkulation erledigen !

Die Formeln (1), (2), (*) und (**) lassen sich in einem Algorithmus verwenden:

Algorithmus des Archimedes (mit „Subtraktionskatastrofe“)

$n := 6$
$s_n := 1$
Wiederhole
    $I_n := n/2 * s_n$
    $A_n := 2 * I_n / \sqrt{4 - s_n^2}$
    Alle Werte ausgeben
    $n := 2 * n$
    $s_n := \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$
BIS $n > 10^6$ { beispielsweise }

EXCEL-Umsetzung (ohne äußere Seitenlänge Sn)

Archimedes-PI

Eckenzahl n	Seitenlänge sn	Innensumme In/2	Außensumme An/2
6	1	3	3,464101615
12	0,51763809	3,105828541	3,215390309
24	0,261052384	3,132628613	3,159659942
48	0,130806258	3,139350203	3,146086215
96	0,065438166	3,141031951	3,1427146
192	0,032723463	3,141452472	3,14187305
384	0,016362279	3,141557608	3,141662747
768	0,008181208	3,141583892	3,141610177
1536	0,004090613	3,141590463	3,141597034
3072	0,002045307	3,141592106	3,141593749
6144	0,001022654	3,141592517	3,141592927
12288	0,000511327	3,141592619	3,141592721
24576	0,000255663	3,141592645	3,141592671
49152	0,000127832	3,141592645	3,141592652
98304	6,39159E-05	3,141592645	3,141592647
196608	3,19579E-05	3,141592645	3,141592646
393216	1,5979E-05	3,141592304	3,141592304
786432	7,98948E-06	3,141592304	3,141592304
1572864	3,99473E-06	3,14158684	3,14158684
3145728	1,99737E-06	3,14158684	3,14158684
6291456	9,98711E-07	3,141674265	3,141674265
12582912	4,99356E-07	3,141674265	3,141674265
25165824	2,49789E-07	3,14307274	3,14307274
50331648	1,24672E-07	3,1374751	3,1374751
100663296	6,32203E-08	3,181980515	3,181980515
201326592	2,98023E-08	3	3
402653184	1,49012E-08	3	3
805306368	0	0	0

Subtraktionskatastrofe !!

EXCEL-Darstellung mit sichtbaren Formeln (Umschalten mit STRG - #)

Nur die schattierten Felder werden durch Bearbeiten – Ausfüllen – unten erzeugt !

Eckenzahl n	Seitenlänge sn	Innensumme In/2	Aussensumme An/2
6	1	=A4/2*B4	=2*C4/WURZEL(4-B4^2)
=2*A4	=WURZEL(2-WURZEL(4-B4^2))	=A5/2*B5	=2*C5/WURZEL(4-B5^2)
=2*A5	=WURZEL(2-WURZEL(4-B5^2))	=A6/2*B6	=2*C6/WURZEL(4-B6^2)
=2*A6	=WURZEL(2-WURZEL(4-B6^2))	=A7/2*B7	=2*C7/WURZEL(4-B7^2)
=2*A7	=WURZEL(2-WURZEL(4-B7^2))	=A8/2*B8	=2*C8/WURZEL(4-B8^2)
=2*A8	=WURZEL(2-WURZEL(4-B8^2))	=A9/2*B9	=2*C9/WURZEL(4-B9^2)
=2*A9	=WURZEL(2-WURZEL(4-B9^2))	=A10/2*B10	=2*C10/WURZEL(4-B10^2)
=2*A10	=WURZEL(2-WURZEL(4-B10^2))	=A11/2*B11	=2*C11/WURZEL(4-B11^2)
=2*A11	=WURZEL(2-WURZEL(4-B11^2))	=A12/2*B12	=2*C12/WURZEL(4-B12^2)
=2*A12	=WURZEL(2-WURZEL(4-B12^2))	=A13/2*B13	=2*C13/WURZEL(4-B13^2)
=2*A13	=WURZEL(2-WURZEL(4-B13^2))	=A14/2*B14	=2*C14/WURZEL(4-B14^2)
=2*A14	=WURZEL(2-WURZEL(4-B14^2))	=A15/2*B15	=2*C15/WURZEL(4-B15^2)
=2*A15	=WURZEL(2-WURZEL(4-B15^2))	=A16/2*B16	=2*C16/WURZEL(4-B16^2)
=2*A16	=WURZEL(2-WURZEL(4-B16^2))	=A17/2*B17	=2*C17/WURZEL(4-B17^2)
=2*A17	=WURZEL(2-WURZEL(4-B17^2))	=A18/2*B18	=2*C18/WURZEL(4-B18^2)
=2*A18	=WURZEL(2-WURZEL(4-B18^2))	=A19/2*B19	=2*C19/WURZEL(4-B19^2)
=2*A19	=WURZEL(2-WURZEL(4-B19^2))	=A20/2*B20	=2*C20/WURZEL(4-B20^2)
=2*A20	=WURZEL(2-WURZEL(4-B20^2))	=A21/2*B21	=2*C21/WURZEL(4-B21^2)
=2*A21	=WURZEL(2-WURZEL(4-B21^2))	=A22/2*B22	=2*C22/WURZEL(4-B22^2)
=2*A22	=WURZEL(2-WURZEL(4-B22^2))	=A23/2*B23	=2*C23/WURZEL(4-B23^2)
=2*A23	=WURZEL(2-WURZEL(4-B23^2))	=A24/2*B24	=2*C24/WURZEL(4-B24^2)
=2*A24	=WURZEL(2-WURZEL(4-B24^2))	=A25/2*B25	=2*C25/WURZEL(4-B25^2)
=2*A25	=WURZEL(2-WURZEL(4-B25^2))	=A26/2*B26	=2*C26/WURZEL(4-B26^2)
=2*A26	=WURZEL(2-WURZEL(4-B26^2))	=A27/2*B27	=2*C27/WURZEL(4-B27^2)
=2*A27	=WURZEL(2-WURZEL(4-B27^2))	=A28/2*B28	=2*C28/WURZEL(4-B28^2)
=2*A28	=WURZEL(2-WURZEL(4-B28^2))	=A29/2*B29	=2*C29/WURZEL(4-B29^2)
=2*A29	=WURZEL(2-WURZEL(4-B29^2))	=A30/2*B30	=2*C30/WURZEL(4-B30^2)
=2*A30	=WURZEL(2-WURZEL(4-B30^2))	=A31/2*B31	=2*C31/WURZEL(4-B31^2)

CellSheet-Umsetzung (TI83) mit n , sn , Sn , In/2 und An/2

ARCH	A	B	C
1	ARCHIM	EDES-π	
2			
3	N	S-INN	S-AUS
4	6	1	1.1547
5	12	.51764	.5359
6	24	.26105	.2633
A1: "ARCHIMEDES-π			Menu

ARCH	C	D	E
1			
2			
3	S-AUSS	INNEN	AUSSE
4	1.1547	3	3.4641
5	.5359	3.1058	3.2154
6	.2633	3.1326	3.1597
C1:			Menu

ARCH	A	B	C
7	48	.13081	.13109
8	96	.06544	.06547
9	192	.03272	.03273
10	384	.01636	.01636
11	768	.00818	.00818
12	1536	.00409	.00409
A12: =2*A11			Menu

ARCH	C	D	E
7	.13109	3.1394	3.1461
8	.06547	3.141	3.1427
9	.03273	3.1415	3.1419
10	.01636	3.1416	3.1417
11	.00818	3.1416	3.1416
12	.00409	3.1416	3.1416
E12: =2*D12/√(4-E→			Menu

ARCH	A	B	C
20	393216	1.6E-5	1.6E-5
21	786432	8E-6	8E-6
22	1.57E6	4E-6	4E-6
23	3.15E6	2E-6	2E-6
24	6.29E6	1E-6	1E-6
25	1.26E7	0	0
A20: =2*A19			Menu

ARCH	C	D	E
20	1.6E-5	3.1414	3.1414
21	8E-6	3.1408	3.1408
22	4E-6	3.1457	3.1457
23	2E-6	3.1457	3.1457
24	1E-6	3.1457	3.1457
25	0	0	0
E20: =2*D20/√(4-E→			Menu

Subtraktionskatastrofe !

π-Approximation im Hauptbildschirm des TI83

Diese Methode ist zwar einfach durchführbar, aber sie liefert in der „Halbautomatik“ (ENTER drücken) lediglich die Seitenlängen s_n der n-Ecke.

Folgendes wird im Hauptbildschirm eingetippt:

$\boxed{1}$ $\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}$ $\boxed{X,T,\Theta,n}$

$\boxed{\text{2nd}}\boxed{x^2}$ $\boxed{(}$ $\boxed{2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{2nd}}\boxed{x^2}$ $\boxed{(}$ $\boxed{4}$ $\boxed{-}$ $\boxed{X,T,\Theta,n}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{)}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}$ $\boxed{X,T,\Theta,n}$

$\boxed{\text{ENTER}}$

$\boxed{\text{ENTER}}$

Dann mehrmals $\boxed{\text{ENTER}}$ drücken, bis ein merkwürdiges Ergebnis erscheint !

Was fällt auf ?
Wieso passiert so etwas merkwürdiges ?
Wie kann man das verhindern ?

Schaue auch im Buch nach und verbessere die Formel !

π-Approximation im seq-Modus des TI83 Ac

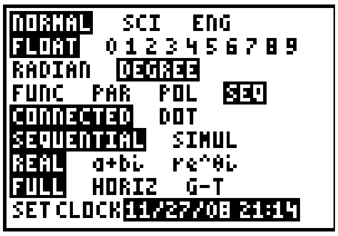
ARCHIMEDES-Formel (halber Umfang des k-Ecks): $s_{2k} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_k^2}}$ mit $s_6 = 1$

<u>Anmerkung:</u> k wird hier deswegen verwendet, weil n im Folgenmodus des TI83 eine andere Bedeutung hat (keine Eckenzahl, sondern fortlaufender Zähler bzw. Index für die Folgenvariablen) . Wegen der unterschiedlichen Bedeutung von n und k ist es günstig, alle 3 Folgenvariablen u, v, w zu verwenden.

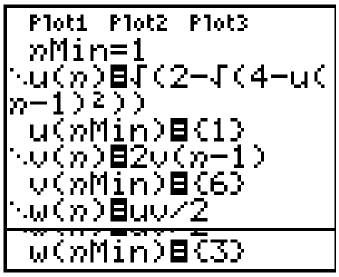
<u>Zuordnung der n,u,v,w zu den in der Formel verwendeten Ausdrücken:</u>

n	Laufvariable für die Folgenterme (insbesondere die Rekursion)
u(n)	Seitenlänge des k-Ecks
v(n)	Eckenzahl k ($= 6 \cdot 2^{n-1}$)
w(n)	Halber Umfang des k-Ecks (dies ist die Approximation für die Zahl π)

Zunächst muss der Rechner in den Folgenmodus (seq) geschaltet werden. Dazu [MODE] betätigen und dann in der 4.Zeile seq markieren (Bild)

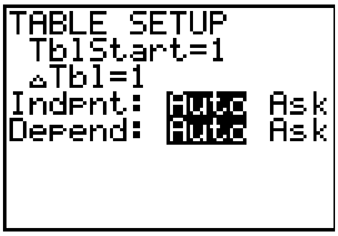


Anschließend [Y=] drücken. Im seq-Bildschirm folgendes eingeben:

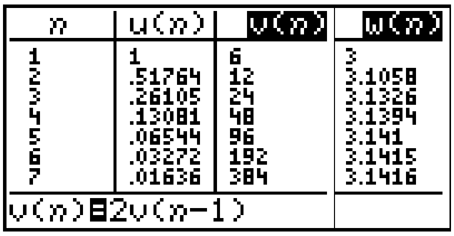


Hinweise: u, v und w befinden sich auf den Tasten [2nd][7] usw . n erreicht man über [X,T,Θ,n] .
Bitte mit besonderer Sorgfalt eingeben. Auf richtige Klammersetzung achten !

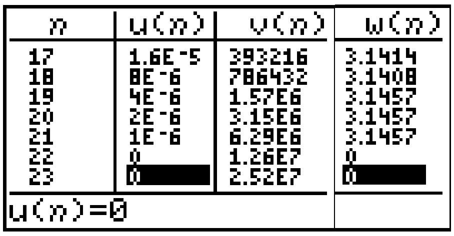
Jetzt müssen die Tabellenparameter gesetzt werden :



Schließlich auf [2nd][GRAPH] drücken (Tabelle).



Wie erwartet kommt es zur „Subtraktionskatastrofe“ , wenn man mit dem Cursor weiter nach unten geht:



Abhilfe mit der „erweiterten“ Formel

$$s_{2k} = \frac{s_k}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_k^2}}}$$

Aufgabe: Diese Formel in den seq-Modus des Rechners eingeben und soweit nach unten gehen, dass π auf 9 Nachkommastellen genau abgelesen werden kann.
(Der Rechner braucht hier ziemlich lange und liefert dann für größere n (bzw. k) stabile Werte)