Geometrische Abbildungen mit Matrizen *Ac*

Gegeben sei ein Punkt P (x ; y) und eine (2,2) – Abbildungsmatrix A .
Erzeugt wird der Bildpunkt P' (x' ; y') mittels der Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

bzw. in Zeilenvektorschreibweise [x' ; y'] = [x ; y] $\cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ = [ax+by ; cx+dy]

<u>Rechenvorschrift (siehe farbliche Veranschaulichung) :</u>
- Bei Multiplikation von A mit einem Spaltenvektor muss dieser um 90° um seinen Mittelpunkt gedreht und dann über die Zeilen der Matrix A gelegt werden. Anschließend Skalarprodukt ausrechnen !
- Bei Multiplikation eines Zeilenvektors mit A müssen die Spalten von A um 90° um ihren Mittelpunkt gedreht und dann über den Zeilenvektor der Matrix A gelegt werden . Anschließend Skalarprodukt ausrechnen !

<u>Beispiele für die Spaltenvektormethode:</u>

1) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x+0y \\ 0x-1y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

Hier wird (x ; y) abgebildet auf (x ; -y) . Es handelt sich daher um eine <u>Spiegelung an der x-Achse</u> !

2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ Es liegt hier eine <u>Spiegelung an der y-Achse</u> vor .

3) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ <u>Punktspiegelung am Ursprung</u>

4) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ <u>Zentrische Streckung mit k = 2 und Z = (0;0)</u>

Mit einem Zeilenvektor wird 4) folgendermaßen gerechnet :

[x' ; y'] = [x ; y] $\cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ = [2x+0y ; 0x+2y] = [2x ; 2y]

Komplexes Beispiel :

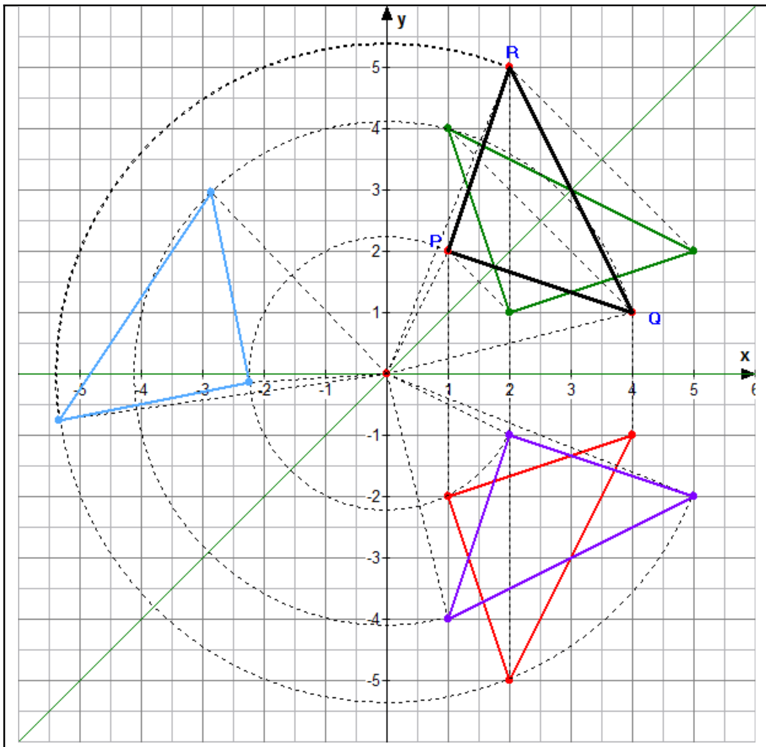
Das Dreieck PQR mit P(1/2) , Q(4/1) , R(2/5) soll durch die jeweilige Matrix A abgebildet werden:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}5\sqrt{3} \\ 0{,}5\sqrt{3} & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Anmerkung:
Da wegen der Platz sparenden Simultanberechnung Zeilenvektoren verwendet werden, setzen wir hier gegenüber einer Rechnung mit Spaltenvektoren die transponierten Abbildungsmatrizen A^T statt A ein !

Simultanberechnung unter Verwendung von Zeilenvektoren [x ; y]:

			Matrix A1		Matrix A2		Matrix A3		Matrix A4	
			1	0	0	1	0	-1	-0,5	$0{,}5\sqrt{3}$
	x	y	0	-1	1	0	1	0	$-0{,}5\sqrt{3}$	-0,5
P	1	2	1	-2	2	1	2	-1	$-0{,}5-\sqrt{3}$	$-1+0{,}5\sqrt{3}$
Q	4	1	4	-1	1	4	1	-4	$-2-0{,}5\sqrt{3}$	$-0{,}5+2\sqrt{3}$
R	2	5	2	-5	5	2	5	-2	$-1-2{,}5\sqrt{3}$	$-2{,}5+\sqrt{3}$



Die Farben beziehen sich auf folgende Abbildungen :

schwarz Originalfigur PQR

rot A1 (x-Achsen-Spiegelung)

grün A2 (Spiegelung an y = x)

violett A3 (Drehung um (0;0) mit 270°)

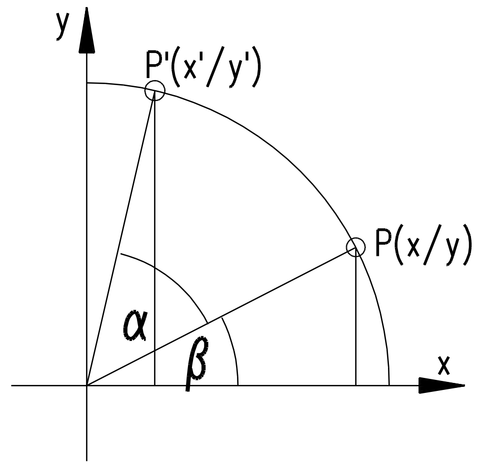
hellblau A4 (Drehung um (0;0) mit 120°)

Drehungen mit Matrizen

Drehungen um den Ursprung mit dem Drehwinkel α erhält man mit folgender Vorschrift :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad D_{(0;0);\alpha}$$

Beweis dieser Beziehung:



Der Punkt P wird um α auf P' gedreht. Es gelten dann:

$x = r\cos(\beta) \quad y = r\sin(\beta)$

$x' = r\cos(\alpha+\beta) \quad y' = r\sin(\alpha+\beta)$

Mit den Additionstheoremen folgt nun:

$x' = r\,(\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta))$

$y' = r\,(\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta))$

Setzt man die obigen Beziehungen für x und y ein, so folgt:

$x' = \cos(\alpha)\cdot x - \sin(\alpha)\cdot y$ und $y' = \sin(\alpha)\cdot x + \cos(\alpha)\cdot y$

Dies lässt sich aber in Matrixschreibweise formulieren:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{q.e.d.}$$

Allgemeine Drehungen um das Drehzentrum $M(x_m ; y_m)$ erhält man so :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_m \\ y - y_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}$$

Hier wird also zuerst das Drehzentrum in den Ursprung verschoben, dann gedreht und anschließend das Zentrum wieder zurück verschoben .

Beispiele:

1) Es seien $M = (7;3)$, $\alpha = 127°$ und die Punkte P(12/3) , Q(13;2) , R(15;5) gegeben

Für P' ergibt sich
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 127° & -\sin 127° \\ \sin 127° & \cos 127° \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 - 7 \\ 3 - 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos 127° + 7 \\ 5\sin 127° + 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3{,}99 \\ 6{,}99 \end{pmatrix}$$

Für Q' ergibt sich
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 127° & -\sin 127° \\ \sin 127° & \cos 127° \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 - 7 \\ 2 - 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cos 127° + \sin 127° + 7 \\ 6\sin 127° - \cos 127° + 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4{,}19 \\ 8{,}39 \end{pmatrix}$$

Für R' ergibt sich
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 127° & -\sin 127° \\ \sin 127° & \cos 127° \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 - 7 \\ 5 - 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\cos 127° - 2\sin 127° + 7 \\ 8\sin 127° + 2\cos 127° + 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}59 \\ 8{,}19 \end{pmatrix}$$

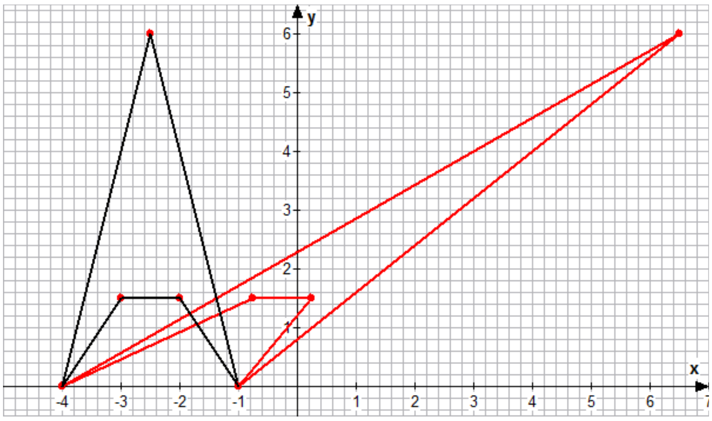
Übersicht über einige Abbildungsmatrizen:

Voraussetzung ist jeweils: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Vorsicht: **Wird mit Zeilenvektoren gearbeitet, so muss die Abbildungsmatrix** $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ **verwendet werden !**

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	Spiegelung an der x-Achse
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Spiegelung an der y-Achse
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	Punktspiegelung an (0;0)
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	Punktspiegelung an (a;b)
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	Spiegelung an $y = x$
$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$	Spiegelung an $y = 2x + b$
$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Scherung in Richtung der x-Achse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$	Scherung in Richtung der y-Achse
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$	Axiale Streckung (Skalierung) in x-Richtung (a) bzw. y-Richtung (b)
$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$	Zentrische Streckung mit Streckzentrum (0;0) und Streckfaktor k
$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_z \\ y - y_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix}$	Zentrische Streckung mit Streckzentrum (x_z;y_z) und Streckfaktor k
$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_z \\ y - y_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix}$	Drehung um das Drehzentrum $Z(x_z ; y_z)$ mit Drehwinkel α
$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$	Stochastische (2,2) - Matrix mit $0 \le a,b \le 1$

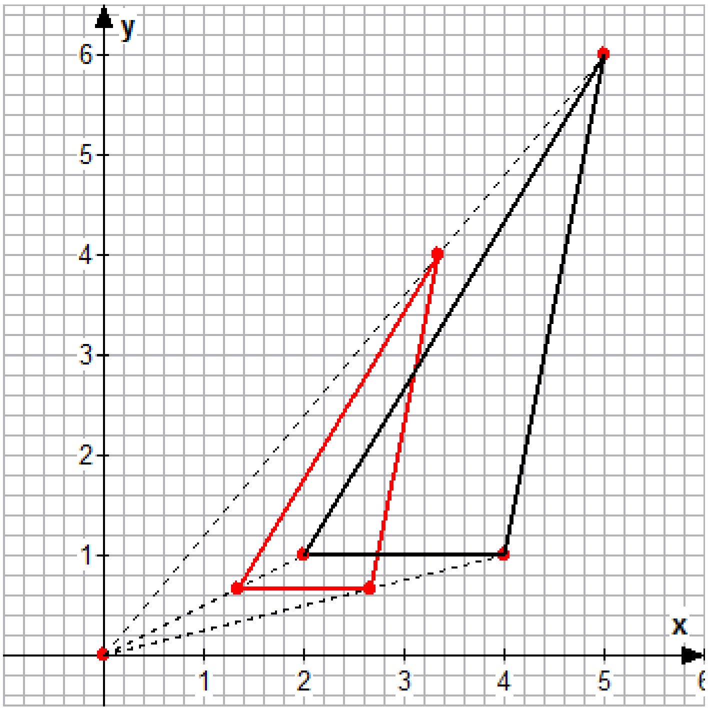
<u>Weitere Abbildungsbeispiele</u>:



<u>Scherung</u> (Faktor 1,5) bzgl. der x-Achse

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1{,}5y \\ y \end{pmatrix}$$

Die Höhe y bleibt also immer erhalten,
aber x wird abgebildet auf x + 1,5y !



<u>Zentrische Streckung</u> $S_{Z;k}$ mit Zentrum Z(0;0)
und Streckfaktor $k = \frac{2}{3}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x \\ \frac{2}{3}y \end{pmatrix}$$

Es werden also beide Koordinaten auf $\frac{2}{3}$ ihrer Größe verkleinert .

Abbildungen von Relationen

Eine Relation ist durch x(t) und y(t) gegeben. Zumeist gilt: $t \in [0;2\pi]$.
Ersetzt man den Punkt P(x/y) durch eine Vielzahl von Punkten P(t) = (x(t) / y(t)), so kann man die Menge

aller Ortsvektoren $\vec{x}(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ zu diesen Punkten abbilden mithilfe der folgenden Vorschrift :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

<u>Beispiel:</u>

Abbilden des Kreises mit M(0/0) und r = 3 durch $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

Die obige Vorschrift liefert

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2\cos(t) + 1{,}8\sin(t) \\ 0{,}6\cos(t) + 2{,}4\sin(t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in [0;2\pi] .$$

Es entsteht hier eine um den Ursprung gedrehte Ellipse, was mit einem CAS-Rechner leicht überprüft werden kann (PARAMETRIC-Einstellung) .

Vergleiche auch mit der Aufgabe 2) in den anschließenden Übungsaufgaben !

Übungsaufgaben zu den Abbildungen mit Matrizen:

1) Gegeben sei die Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} \sqrt{0,5} & -\sqrt{0,5} \\ \sqrt{0,5} & \sqrt{0,5} \end{pmatrix}$ sowie ein Dreieck PQR mit

P(2/1) , Q(4/1) , R(6/5) .
Berechne mittels Matrizenmultiplikation (mit Spaltenvektoren) die Koordinaten des Bilddreiecks P'Q'R' und zeichne Original und Bild in ein gemeinsames Koordinatensystem.
Welche geometrische Abbildung vermutest du ? Begründe mit den Kenntnissen aus der Mittelstufe.
Durch welche Matrix B könnte man diese Abbildung rückgängig machen (d.h. aus dem Bild das Original erzeugen) ? Löse mit Ansatz und Rechnung !
Ermittle rechnerisch die Fixpunkte der Abbildung. Welcher Ansatz ist dazu erforderlich ?

2) Gegeben sei die Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$ sowie ein Kreis mit r = 5cm (Mittelpunkt im Ursprung) . Stelle die Parameterform mit x(t), y(t) für diesen Kreis auf und schreibe dies als Spaltenvektor so auf : $\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. (spezielle Kreisparameter hier einsetzen !)

Berechne den Bildvektor $\vec{x}\,' = A \cdot \vec{x}$ und zeichne Original und Bild in ein Koordinatensystem.
Berechne A^2 und zeichne das Bild von $\vec{x}\,' = A^2 \cdot \vec{x}$.
Stelle eine Vermutung darüber auf, wie sich das Bild verändert, wenn man A^n statt A als Abbildungsmatrix verwendet .

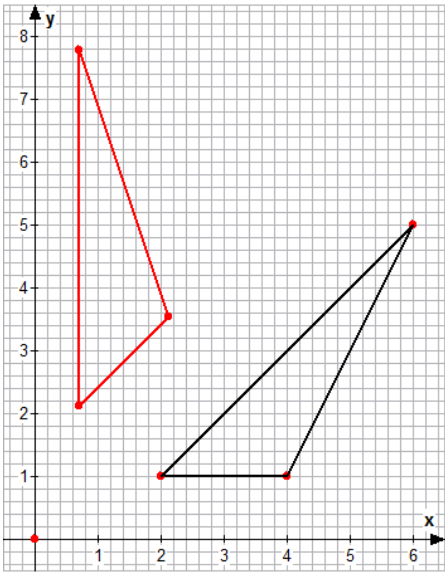
3) Zeichne die Ursprungsgerade mit y = 0,5x in ein KOS.
Spiegele das Dreieck aus Aufg. 1) an dieser Geraden.
Welche Abbildungsmatrix könnte man für diese Spiegelung angeben ? (Mit Rechnung)
Ermittle rechnerisch die Fixpunkte .

Löse die Aufgabenstellungen auch mit der Spiegelachse y = -3x .

Ebenso mit der Spiegelachse y = -3x + 2 .
Vorsicht:
Bei nicht durch den Ursprung verlaufenden Geraden (z.B.: y = 2 – 3x) gilt die folgende Abbildungsgleichung: $\vec{x}\,' = A \cdot (\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$, wobei b der y-Achsenabschnitt ist !

Lösungen zu den Aufgaben:

Zu 1) P’($\sqrt{5}$ / 3 $\sqrt{5}$) Q’(3 $\sqrt{5}$ / 5 $\sqrt{5}$) R’($\sqrt{5}$ / 11 $\sqrt{5}$)



Es handelt sich um eine Drehung um O mit Drehwinkel 45° .

Begründung:

Die Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecken PP’ gehen alle durch O . Also ist O das Drehzentrum. Nachmessen liefert einen Winkel von 45° .

Rückgängig machen kann man die Abbildung durch B = A^I , weil aus $\vec{x}\,' = A \cdot \vec{x}$ folgt:
$A^I \cdot \vec{x}\,' = A^I \cdot A \cdot \vec{x} = E \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Ansatz: Für B gilt : B·A = E $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{0{,}5} & -\sqrt{0{,}5} \\ \sqrt{0{,}5} & \sqrt{0{,}5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Es ergibt sich das LGS :

$\sqrt{0{,}5}\,a + \sqrt{0{,}5}\,b = 1$ $-\sqrt{0{,}5}\,a + \sqrt{0{,}5}\,b = 0$ $\sqrt{0{,}5}\,c + \sqrt{0{,}5}\,d = 1$ $-\sqrt{0{,}5}\,c + \sqrt{0{,}5}\,d = 0$	Lösung: a = $\sqrt{0{,}5}$ b = $\sqrt{0{,}5}$ c = - $\sqrt{0{,}5}$ d = $\sqrt{0{,}5}$ Also B = $A^I = \begin{pmatrix} \sqrt{0{,}5} & \sqrt{0{,}5} \\ -\sqrt{0{,}5} & \sqrt{0{,}5} \end{pmatrix}$

Fixpunkte ermitteln: Ansatz: $A \cdot \vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{0{,}5} & -\sqrt{0{,}5} \\ \sqrt{0{,}5} & \sqrt{0{,}5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Es ergibt sich das LGS $\left| \begin{matrix} \sqrt{0{,}5}x - \sqrt{0{,}5}y = x \\ \sqrt{0{,}5}x + \sqrt{0{,}5}y = y \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} (\sqrt{0{,}5} - 1)x = \sqrt{0{,}5}y \\ -\sqrt{0{,}5}x = (\sqrt{0{,}5} - 1)y \end{matrix} \right| \begin{matrix} I \cdot (\sqrt{0{,}5} - 1) - II \cdot \sqrt{0{,}5} \\ I \cdot \sqrt{0{,}5} + II \cdot (\sqrt{0{,}5} - 1) \end{matrix} \Leftrightarrow$

$\left| \begin{matrix} (\sqrt{0{,}5} - 1)^2 x + 0{,}5x = 0 \\ 0 = 0{,}5y + (\sqrt{0{,}5} - 1)^2 y \end{matrix} \right|$ mit der leicht zu erkennenden Lösung x = y = 0

Daher ist (0/0) der einzige Fixpunkt (, was bei einer Drehung um O nicht verwundert) !

Zu 2) Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5\cos(t) \\ 5\sin(t) \end{pmatrix}$.

Mit $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ erhält man für $\vec{x}\,' = A \cdot \vec{x}$: $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5\cos(t) \\ 5\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) + 3\sin(t) \\ \cos(t) + 4\sin(t) \end{pmatrix}$

Sowohl $\vec{x}$ als auch $\vec{x}\,'$ kann man mit Parametric beim CAS-Rechner darstellen:

<u>Kreis und Abbildung des Kreises mit A, A^2, A^3</u>

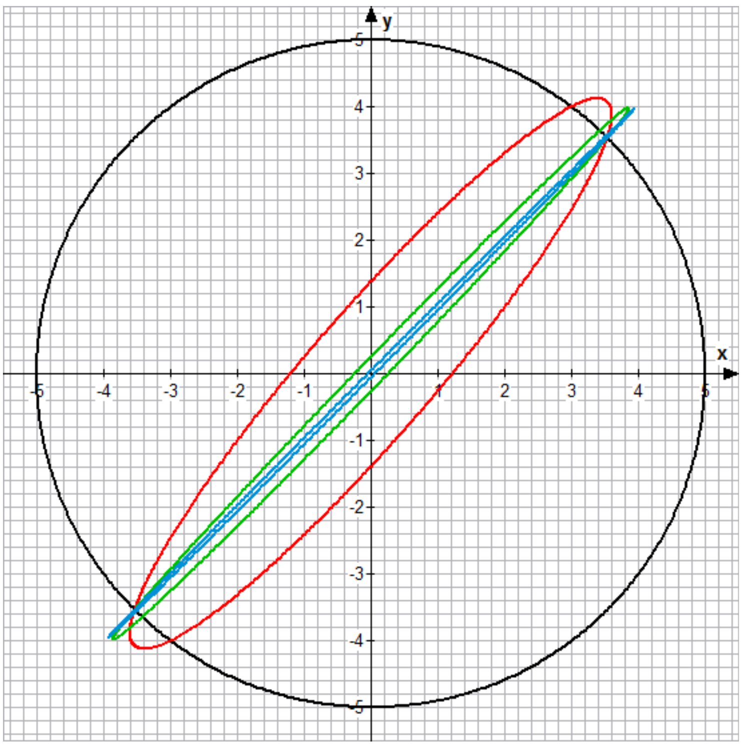
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5\cos(t) \\ 5\sin(t) \end{pmatrix}$ Kreis mit M(0/0) und r = 5

Durch die folgenden Abbildungen werden Ellipsen erzeugt:

$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 2\cos(t) + 3\sin(t) \\ \cos(t) + 4\sin(t) \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}72 \\ 0{,}24 & 0{,}76 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}\,'' = \begin{pmatrix} 1{,}4\cos(t) + 3{,}6\sin(t) \\ 1{,}2\cos(t) + 3{,}8\sin(t) \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0{,}256 & 0{,}744 \\ 0{,}248 & 0{,}752 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}\,''' = \begin{pmatrix} 1{,}28\cos(t) + 3{,}72\sin(t) \\ 1{,}24\cos(t) + 3{,}76\sin(t) \end{pmatrix}$



<u>Zuordnung:</u>

schwarz Original (Kreis)

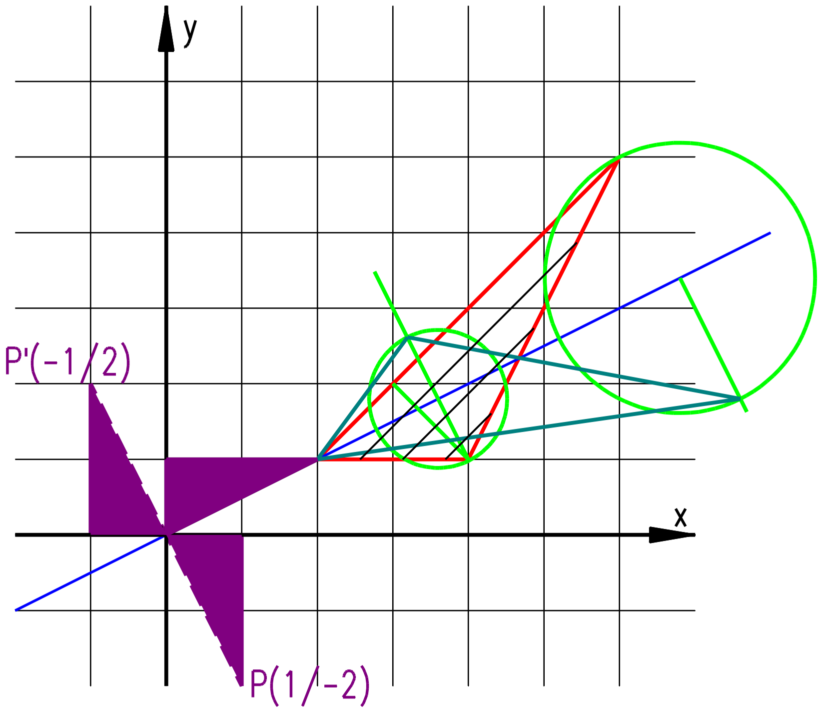
rot 1. Abbildung (Ellipse)

grün 2. Abbildung (Ellipse)

blau 3. Abbildung (Ellipse)

<u>Vermutung:</u> Verwendet man A^n als Abbildungsmatrix , so wird die Ellipse noch stärker gestaucht und weiter nach rechts gedreht !

Zu 3)



Ermittlung der Abbildungsmatrix:

Bei dieser Abbildung gelten z.B.
(2/1) → (2/1) und (1/-2) → (-1/2) .
Dies führt zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

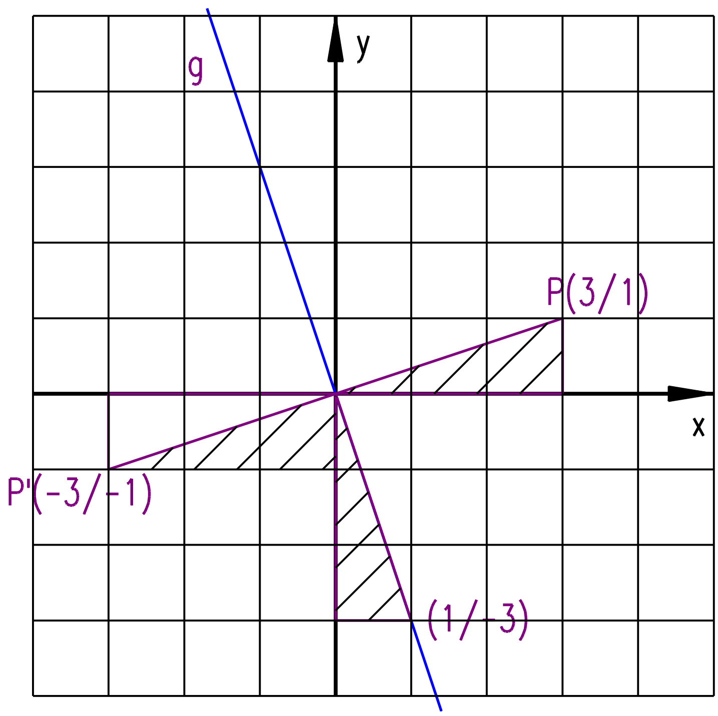
Es folgt das LGS :
2a + b = 2   2 + d = 1
a – 2b = -1   c – 2d = 2

Lösung des LGS:
a = 3/5   b = 4/5   c = 4/5   d = -3/5

Also ist $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Fixpunkte: Ansatz: $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Es folgt nach Rechnung y = 0,5x (Ursprungsgerade)

Für y = -3x ergibt sich folgendes:



Ermittlung der Abbildungsmatrix:

Bei dieser Abbildung gelten z.B.
(1/-3) → (1/-3) und (3/1) → (-3/-1) .
Dies führt zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es folgt das LGS:
a - 3b = 1   c - 3d = -3   3a + b = -3
3c + d = -1

Lösung des LGS:
a = -4/5   b = -3/5   c = -3/5   d = 4/5 ,

also ist $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Fixpunkte: Ansatz: $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Es folgt nach Rechnung y = -3x (Ursprungsgerade)

Bei ***allgemeinen*** Geraden ist Vorsicht geboten !!! Hier gilt die Abbildungsgleichung $\vec{x}\,' = A \cdot \vec{x}$ nicht !

Statt dessen muss zunächst eine Verschiebung der Geraden in den Ursprung vorgenommen werden.
Dann wird gespiegelt mit der Matrix A, anschließend wieder zurück verschoben .
Es genügt dabei, eine y-Achsenverschiebung um (–b) vorzunehmen .

Die Abbildungsgleichung lautet folgendermaßen :

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ bzw. vereinfacht : $\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y'-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-b \end{pmatrix}}$

Für das Beispiel y = 2 – 3x gilt demnach : $\begin{pmatrix} x' \\ y'-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-2 \end{pmatrix}$

Anhand der grafischen Darstellung kann man 2 Abbildungsbeispiele betrachten, z.B.:
(3/3) $\rightarrow$ (-3/1) und (5/-3) $\rightarrow$ (-1/-5) .

Die Matrix-Vektordarstellungen sind dann :

$\begin{pmatrix} -3 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3-2 \end{pmatrix}$ sowie $\begin{pmatrix} -1 \\ -5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -3-2 \end{pmatrix}$

Das LGS ist -3 = 3a + b -1 = 3c + d -1 = 5a – 5b -7 = 5c – 5d
Lösung: a = -0,8 b = -0,6 c = -0,6 d = 0,8

Die Abbildungsgleichung für die Achsenspiegelung an y = 2 – 3x lautet also: $\begin{pmatrix} x' \\ y'-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-2 \end{pmatrix}$

Für die Fixpunkte bedeutet das : $\begin{pmatrix} x \\ y-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-2 \end{pmatrix}$

Umgeformt: $\begin{pmatrix} 5x \\ 5y-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x-3y+6 \\ -3x+4y-8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 9x-6 = -3y \\ y = 2-3x \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} -3x+2 = y \\ y = 2-3x \end{matrix} \right|$

Da die Gleichungen äquivalent sind, ergibt sich als Lösung für die Fixpunkte die Achse mit y = 2 – 3x !

Erweiterungsthema:

Axonometrische Abbildung des Raumes auf die Zeichenebene

Diese Abbildung wird z.B. bei Computergrafiken verwendet, um 3D-Gebilde auf dem 2D-Bildschirm darzustellen.

Gegeben sind ein 2D-KOS mit Ursprung U = U2D (z.B. Computerbildschirm) sowie ein 3D-Ursprung O = U3D in diesem 2D-KOS. Jeder abzubildende Punkt P(x;y;z) des Raumes lässt sich dann durch eine Transformations-vorschrift auf den 2D-Bildschirm bringen. Der abgebildete Punkt (Bildpunkt) sei P' .

<u>Beispiel:</u> Wir verwenden einen (vereinfachten) 60 mal 40 – Computerbildschirm und legen fest:

U = U2D = (0;0) — 2D-Ursprung (am linken unteren Rand des Bildschirms)
Anmerkung: Die computerinterne Regelung mit dem Ursprung links <u>oben</u> bleibe zunächst außen vor.

O = U3D = (30;20) — 3D-Ursprung (in der Mitte des Bildschirms)

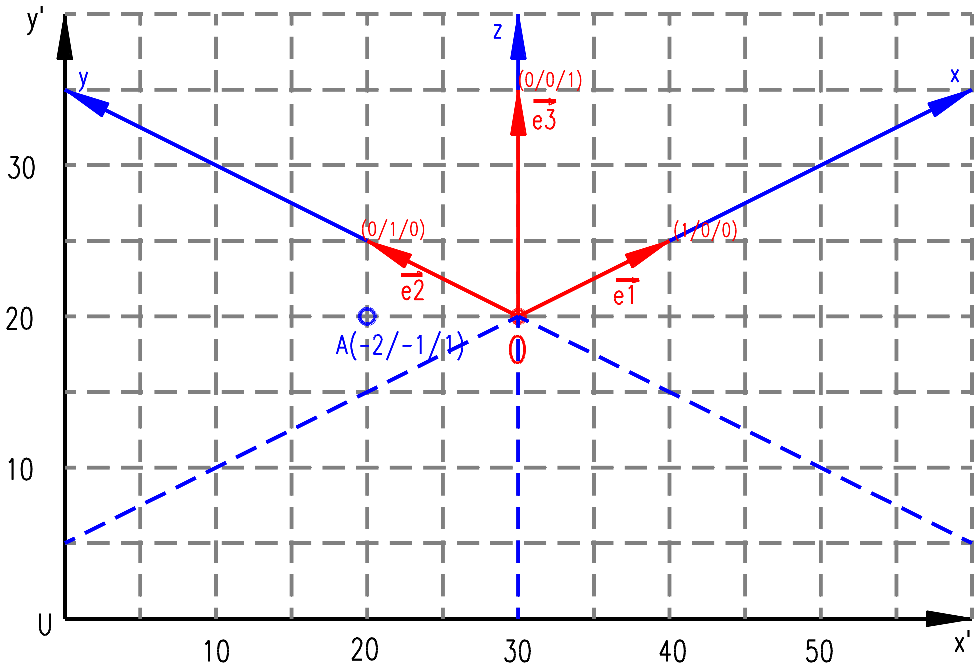
$$A = \begin{pmatrix} 10 & -10 & 0 \\ 5 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$ ist eine mögliche Abbildungsmatrix, sinnvoll gewählt

Die Abbildungsvorschrift ist dann:

$$\overrightarrow{UP'} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 10 & -10 & 0 \\ 5 & 5 & 15 \end{pmatrix} \\ \vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3 \end{array} \cdot \overrightarrow{OP} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -10 & 0 \\ 5 & 5 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Die <u>*Spalten*</u> der Matrix A sind dann die Basisvektoren (Einheitsvektoren) des 3D-Systems (s.Grafik !) .

Die folgende Grafik zeigt, wie ein Punkt A(-2/-1/1) in dem <u>oben definierten</u> System abgebildet wird. Außerdem sind die Einheitsvektoren sowie die Einheiten auf den 3D-Achsen zu erkennen . Die beiden Einheitsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ sollen schräg nach hinten in die Blattebene hineingehen !



Aufgaben:

1) Für alle Aufgabenteile von 1) gelte die Abbildungsgleichung $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -10 & 0 \\ 5 & 5 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Zeichne in die obige Grafik folgende 3D-Punkte ein:
B(0/2/-1) C(1/1/0) D(1/3/-1) E(0/2/0) F(1/0/-1) G(4/3/-3) . Was fällt auf ?
Kontrolliere auch durch Ausrechnen der Koordinaten anhand der Abbildungsvorschrift .

b) Nimm an , dass der Computerbildschirm beliebig viele Pixels (= Picture elements) hat und berechne auf der Grundlage der oben angegebenen Abbildungsgleichung diejenigen 2D-Punkte, die sich aus folgenden 3D-Punkten ergeben: P(0/5/0) Q(8/-10/10) R(-5/-5/-10) S(3/-4/-7)

c) Was passiert mit rationalen 3D-Koordinaten (Kommazahlen) ?

d) Untersuche, welche 3D-Punkte auf dem 2D-Punkt (40/10) liegen .

2) Zeichne ein 2D-System und innerhalb dessen das 3D-System für folgende Vorschrift:

$$\overrightarrow{UP'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{OP}$$

Es soll hier nicht notwendigerweise ein Bildschirm als 2D-System verwendet werden, sondern ein übliches Koordinatensystem mit 4 Quadranten. Die Größe dieses Systems soll so gewählt werden, dass sowohl die Einheitsvektoren als auch das gesamte 3D-System übersichtlich erscheinen .

3) Auf einem Computerbildschirm (800 mal 600 Pixels) soll das übliche 3D-System abgebildet werden: z-Achse nach oben, y-Achse nach rechts, x-Achse nach vorne, links im 45°-Winkel. Ursprung genau in der Bildschirmmitte. Die y-Achse soll auf 800 Pixeln genau 16 Einheiten erhalten, also 50 Pixels pro y-Einheit. Die z-Achse soll die gleiche Einteilung bekommen wie die y-Achse. Auf der x-Achse soll die Einteilung das $1/\sqrt{2}$ - fache der y-Einteilung sein.
Lege eine Zeichnung an und ermittle die Abbildungsvorschrift in Matrixschreibweise .

Lösungen und Lösungshinweise

Zu 1. a) Es fällt auf, dass F und G auf dem Computerbildschirm zusammenfallen .

b) P(0/5/0) $\Rightarrow$ P'(-20/45)
Q(8/-10/10) $\Rightarrow$ Q'(210/160)
R(-5/-5/-10) $\Rightarrow$ R'(30/-180)
S(3/-4/-7) $\Rightarrow$ S'(100/-90)

c) Bei rationalen 3D-Koordinaten müssen die Pixel-Koordinaten in der Regel gerundet werden !

d) Ansatz $\overrightarrow{UP'} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -10 & 0 \\ 5 & 5 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Umformung liefert:

$\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x - 10y \\ 5x + 5y + 15z \end{pmatrix}$. Löst man das LGS, so erhält man: $\left| \begin{array}{c} y = x - 1 \\ z = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \end{array} \right|$

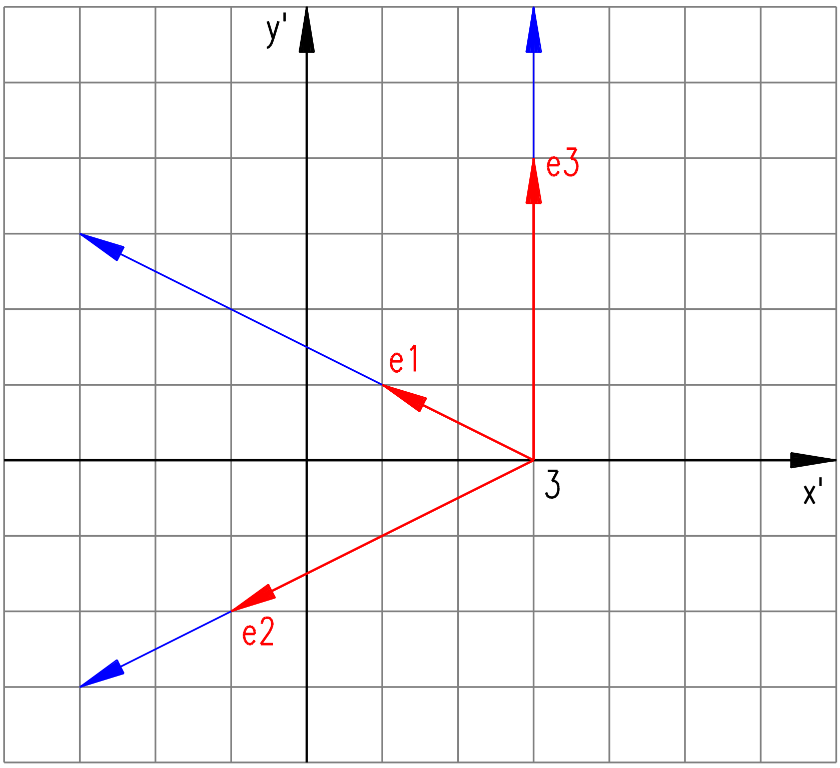
Daher gibt es für das Problem unendlich viele Lösungen z.B. :

Für x = 0 : P(0/-1/$-\frac{1}{3}$)

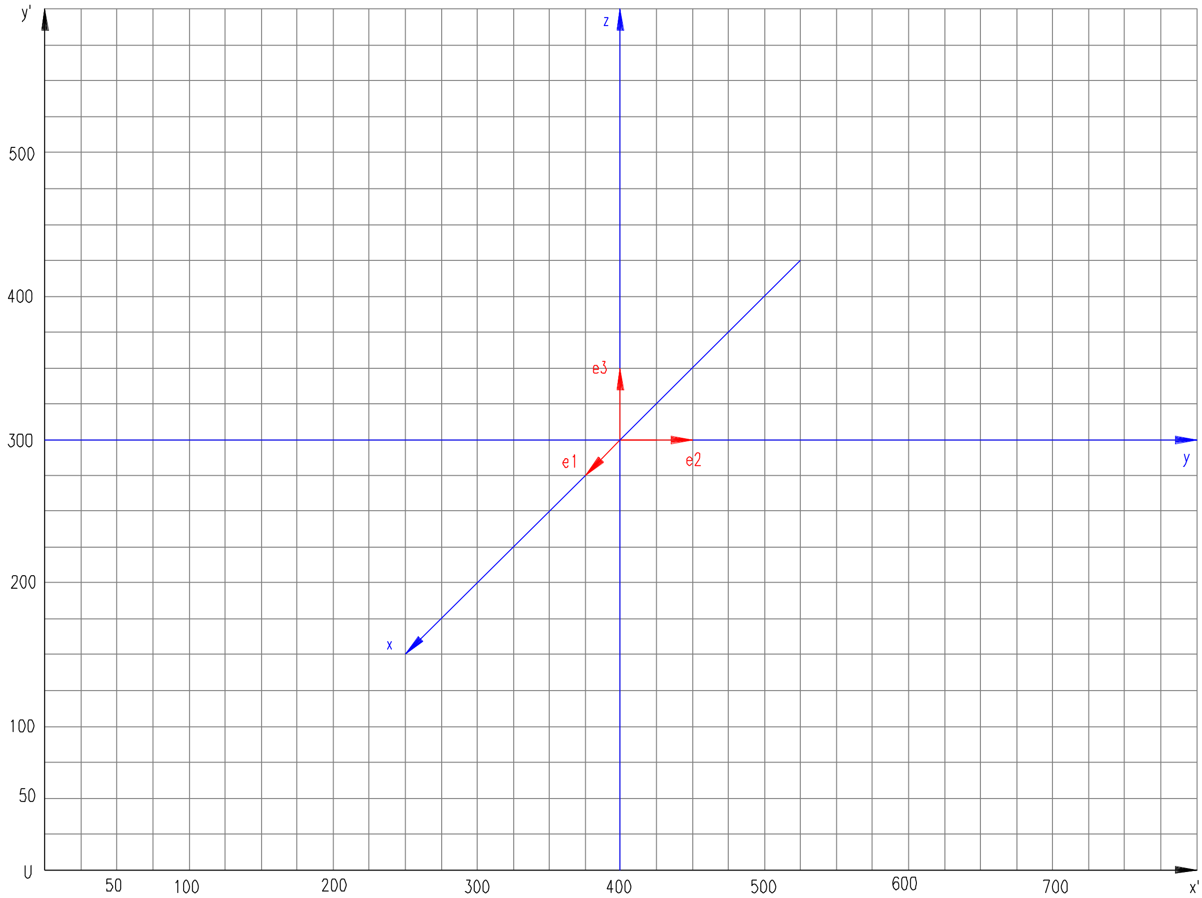
Für x = 1: P(1/0/-1)
Für x = 4: P(4/3/-3)
usw.

Die Punkte liegen daher auf der Geraden mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Zu 2.



Zu 3.



In der Grafik wurde festgelegt: $x \in [-6 ; 6]$ $y \in [-8 ; 8]$ $z \in [-6 ; 6]$
Der x-Bereich könnte sogar noch deutlich vergrößert werden, etwa [-9 ; 9] .

Man erkennt, dass die Einheitsvektoren (diese sind identisch mit den Spaltenvektoren der Matrix A) folgendermaßen beschrieben werden können :

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} -25 \\ -25 \end{pmatrix} \qquad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Somit ist die Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} -25 & 50 & 0 \\ -25 & 0 & 50 \end{pmatrix}$

Die Abbildungsvorschrift lässt sich nun leicht aufschreiben :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -25 & 50 & 0 \\ -25 & 0 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Damit lassen sich alle Transformationen ausführen !

<u>Beispiele:</u>

(0/0/0) $\rightarrow$ (400/300)
(0/6/0) $\rightarrow$ (700/300)
(4/0/0) $\rightarrow$ (300/200)
(1/1/1) $\rightarrow$ (425/325)
(2/3,5/-4,5) $\rightarrow$ (525/25)