Matrizen in Anwendungen

Ac

Einstiegsbeispiel (sehr stark vereinfachtes Modell) :

Eine Firma stellt 3 Typen von Schränken her, die aus Seitenteilen, Türen, Böden und Schrauben bestehen. Je Schrank werden folgende Einheiten benötigt:

Typ / **Einheiten**	T1	T2	T3
Seitenteile	3	4	5
Türen	1	2	3
Böden	2	3	6
Schrauben	12	18	30

Es sollen 14 Schränke vom Typ1, 10 Schränke vom Typ2 und 8 Schränke vom Typ3 gefertigt werden. Wie viele Seitenteile, Türen, ... benötigt die Firma ?

Lösung:

Anzahl Seitenteile = $14 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 8 \cdot 5 = 122$
Anzahl Türen = $14 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 58$
...

Systematisierung mit Matrizen (Tabellen):

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 12 & 18 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 14 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 8 \\ 1 \cdot 14 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 8 \\ 2 \cdot 14 + 3 \cdot 10 + 6 \cdot 8 \\ 12 \cdot 14 + 18 \cdot 10 + 30 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122 \\ 58 \\ 106 \\ 588 \end{pmatrix}$$

Die Firma benötigt also 122 Seitenteile, 58 Türen, 106 Böden und 588 Schrauben .

Anmerkung:

Beim Produkt einer Matrix mit einem Vektor (Stückliste) entsteht ein Vektor .

Das FALK-Schema (zur Veranschaulichung der Matrizenmultiplikation)

Bei der Multiplikation von A (links unten) mit B (rechts oben) entsteht C (rechts unten).

$$\begin{array}{cccc|cc} & & & & 1 & 0 \\ & & & & 7 & 4 \\ & & & & 5 & 0 \\ & & & & 8 & 2 \\ \hline 7 & 8 & 1 & 3 & 92 & 38 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 10 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 49 & 28 \end{array}$$

Als Beispiel sehen wir uns an, wie das Ergebnis 38 als Skalarprodukt der ersten Zeile von A mit der zweiten Spalte von B entsteht.
Dieses Ergebnis der gebildeten Summe aus Produkten (Skalarprodukt) steht an genau der Stelle, an der sich die (Verlängerung der) oben genannten Zeile und Spalte kreuzen !
Die Verbindungslinien sollen andeuten, welche Zahlen miteinander multipliziert werden müssen, damit die Summe der entstandenen Produkte die Zahl 38 liefert.
Die Zahl 38 entsteht also durch das Skalarprodukt $7 \cdot 0 + 8 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2$.

Auf die gleiche Art entstehen die anderen 5 Elemente der Ergebnismatrix C .

> Dem Falk-Schema kann man entnehmen, dass eine Multiplikation zweier Matrizen nur dann möglich ist, wenn die *Spaltenzahl der ersten Matrix* mit der *Zeilenzahl der zweiten Matrix* übereinstimmt .
> Symbolisch: $\mathbf{(A_{ik}) \cdot (B_{km}) = (C_{im})}$

Anmerkung: das FALK-Schema ist benannt nach **Sigurd Falk** (TU Braunschweig).

Einige Anwendungen zur Matrizenmultiplikation

A) Stücklisten in der Wirtschaftslehre:

Für 3 verschiedene Computermodelle werden die Herstellungskosten (in €) für Einzelteile angegeben:

$$\begin{array}{r|ccc} & PCX & PCY & PCZ \\ \hline Mainboard & 65 & 90 & 152 \\ Grafikkarte & 35 & 77 & 210 \\ \text{Pr}\,ozessor & 83 & 124 & 257 \\ Festplatte & 61 & 82 & 104 \end{array}$$

Ein Händler bestellt 150 Stück von PCX, 90 Stück von PCY und 45 Stück von PCZ, während ein anderer Händler 210 Stück von PCX, 125 Stück von PCY und 30 Stück von PCZ bestellt.
a) Die Gesamtkosten für jeden Händler, nach Einzelteilen getrennt, sollen mit Matrizenrechnung ermittelt werden.
b) Anschließend sollen daraus alle Kosten für jeden Händler ermittelt werden.

a) Lösung (mit FALK-Schema):

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 150 & 210 \\ & & & 90 & 125 \\ & & & 45 & 30 \\ \hline 65 & 90 & 152 & 24690 & 29460 \\ 35 & 77 & 210 & 21630 & 23275 \\ 83 & 124 & 257 & 35175 & 40640 \\ 61 & 82 & 104 & 21210 & 26180 \end{array}$$

Interpretation:

Einzelteile	Mainboards	Grafikkarten	Prozessoren	Festplatten
Händler 1	24.690,00 €	21.630,00 €	35.175,00 €	21.210,00 €
Händler 2	29.460,00 €	23.275,00 €	40.640,00 €	26.180,00 €

b) Die Gesamtkosten betragen 102705,00 € für Händler 1 und 119555,00 € für Händler 2 .

Hinweis für die Benutzung des TI83 (TI84):

Hat man obige Ergebnismatrix etwa in [C] abgespeichert, so kann man die Spalten der Matrix in Listen abspeichern mittels Matr > List([C],L_1,L_2) , zu finden unter MATRIX MATH 8: .
Die Summe der Spalten erhält man dann mittels sum(L_1) bzw. sum(L_2) im Hauptbildschirm.

B) Lineare Gleichungssysteme (LGS):

Ein LGS lässt sich immer in der Form $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ schreiben .

Beispiel:

$\cdot x_1$	$\cdot x_2$	$\cdot x_3$	$\cdot x_4$	$\cdot 1$
2	6	0	-3	4
1	0	4	5	0
-1	1	3	0	1

lässt sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

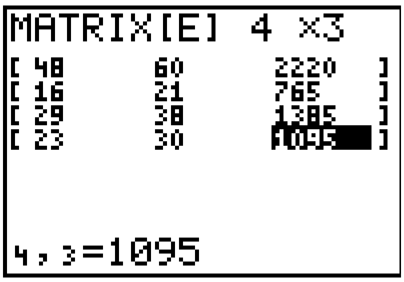
Um ein solches System zu lösen verwendet man das **rref** - Verfahren (reduced row echelon form), welches eine Treppenform der Matrix erzeugt, so dass die Lösungen eines LGS oder zumindest vereinfachte Beziehungen zwischen den Variablen abgelesen werden können .

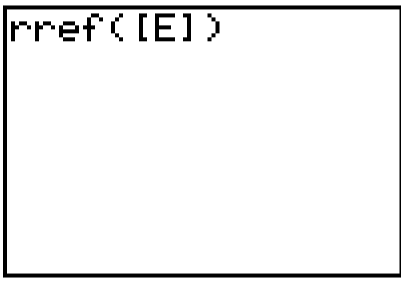
Der TI84 verwendet ein solches Verfahren, jedoch ist **der Lösung nicht immer zu trauen**,wie das folgende Beispiel zeigt:

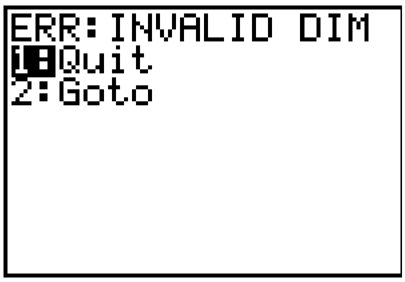
Das überbestimmte LGS
$$\begin{aligned} 48a + 60b &= 2220 \\ 16a + 21b &= 765 \\ 29a + 38b &= 1385 \\ 23a + 30b &= 1095 \end{aligned}$$

besitzt die Lösung a = 15 ; b = 25 , wie man leicht nachprüfen kann .

Versucht man jedoch, dieses System mit dem rref-Befehl des TI84 zu lösen, so passiert dies:







Dies passiert, weil der TI84 beim rref-Befehl voraussetzt, dass die Spaltenzahl mindestens so groß ist wie die Zeilenzahl ! Im Beispiel ist aber die Spaltenzahl (=3) kleiner als die Zeilenzahl (=4) .

Übrigens haben CAS (Computer-Algebra-Systeme) wie der TI92 diese Einschränkung nicht .

C) Marktforschung (Beobachtung des Käuferverhaltens):

Ein Institut untersucht den Wechsel von Käufern zwischen den Zeitschriften A, B und C in einem vorher festgelegten Zeitraum. Zu Beginn habe A 1000 , B 4000 und C 2000 Käufer.
Die folgende Übergangsmatrix sei gegeben:

von / **nach**	A	B	C
A	80%	20%	10%
B	10%	70%	50%
C	10%	10%	40%

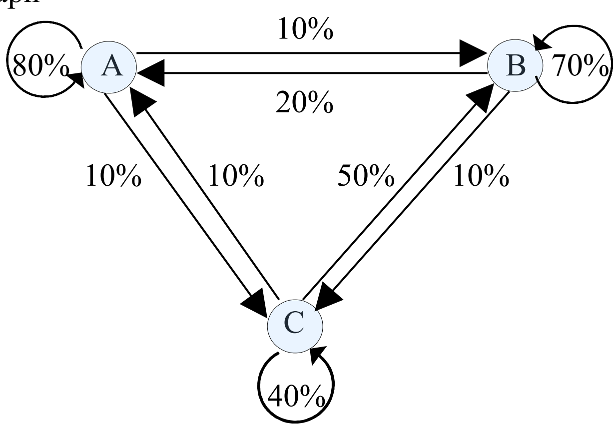
Dies bedeutet z.B. , dass 80% der Käufer von A wieder die Zeitschrift A kaufen usw.

Aufgaben:

a) Zeichne einen Übergangsgraphen ("Gozintograph" ; Erläuterung siehe unten) .
b) Wie viele Käufer hat die Zeitschrift A am Ende des Untersuchungszeitraums ?
c) Wie viele Käufer hat die jeweilige Zeitschrift am Ende des Untersuchungszeitraums ?
Schreibe dazu die "Verteilung" der Käufer als Spaltenvektor und verwende Matrizenrechnung.
d) Wie viele Käufer hat die jeweilige Zeitschrift nach 5; 10; 50 Zeiträumen, falls die Übergangsmatrix sich nicht verändert ?
e) Gibt es eine "Grenzverteilung" (stationäre Verteilung) der Käufer ?

Lösungen:

Zu a) Gozintograph



Zu b) Zeitschrift A hat am Ende 1800 Käufer.

Rechnung: $1000 \cdot 0{,}8 + 4000 \cdot 0{,}2 + 2000 \cdot 0{,}1 = 1800$. Es ergibt sich also ein Käuferzuwachs .

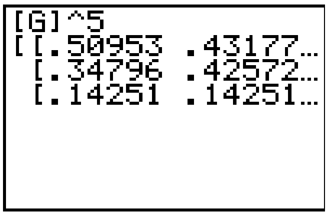
Zu c) Startvektor: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 4000 \\ 2000 \end{pmatrix}$ Übergangsmatrix: $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

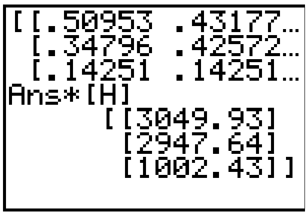
Dann ist $\vec{x}_1 = M \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 4000 \\ 2000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1800 \\ 3900 \\ 1300 \end{pmatrix}$

Für B ergeben sich 3900 Käufer und für C 1300 Käufer . B und C verlieren also Käufer .

Zu d) Nach 2 Zeiträumen haben die Zeitschriften die Verteilung $\vec{x}_2 = M \cdot M \cdot \vec{x}_0 = M^2 \cdot \vec{x}_0$ usw.
Allgemein gilt: $\vec{x}_n = M^n \cdot \vec{x}_0$.

Rechnung mit dem TI84 für n=5 (Matrix M in [G], Startvektor in [H] gespeichert):





Wir erhalten also $\vec{x}_5 \approx \begin{pmatrix} 3050 \\ 2948 \\ 1002 \end{pmatrix}$

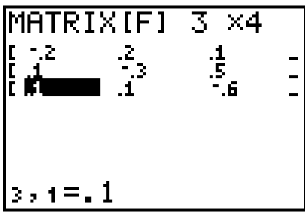
Analog ergeben sich: $\vec{x}_{10} \approx \begin{pmatrix} 3234 \\ 2766 \\ 1000 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x}_{50} \approx \begin{pmatrix} 3250 \\ 2750 \\ 1000 \end{pmatrix}$

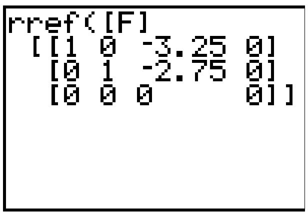
Offensichtlich hat sich nun bei Zeitschrift C nichts mehr geändert.

Zu e) Wenn es eine Grenzverteilung $\vec{x}_G$ gibt, so muss gelten: $M \cdot \vec{x}_G = \vec{x}_G$.

Dieses unbekannte $\vec{x}_G = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ kann durch ein LGS wie folgt bestimmt werden :

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,5 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,8x_1 + 0,2x_2 + 0,1x_3 \\ 0,1x_1 + 0,7x_2 + 0,5x_3 \\ 0,1x_1 + 0,1x_2 + 0,4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -0,2x_1 + 0,2x_2 + 0,1x_3 \\ 0,1x_1 - 0,3x_2 + 0,5x_3 \\ 0,1x_1 + 0,1x_2 - 0,6x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$





$x_1 = 3,25x_3$
$x_2 = 2,75x_3$

Das bedeutet $\vec{x}_G = \begin{pmatrix} 3,25k \\ 2,75k \\ k \end{pmatrix}$

Wie legt man k fest ? Wir wissen, dass die Summe aller Käufer 1000+4000+2000=7000 beträgt.
Die Summe der Grenzvektorkomponenten beträgt 7k. Also gilt 7k = 7000 .

Dann ist k=1000 und damit $\vec{x}_G = \begin{pmatrix} 3250 \\ 2750 \\ 1000 \end{pmatrix}$.

<u>Anmerkung:</u> Die Bezeichnung **"Gozintograph"** geht auf den fiktiven italienischen Mathematiker ZEPARZAT GOZINTO zurück, der wiederum eine Erfindung des Mathematikers A. VAZSONYI ist. Dieser ließ sich durch das Wortspiel "the part that goes into" zu dieser Namensgebung anregen.

Vorsicht beim Aufstellen der Übergangsmatrix

Beim **Aufstellen der Übergangsmatrix** ist besondere Vorsicht geboten !

nach / von	A	B	C
A	80%	10%	10%
B	20%	70%	10%
C	10%	50%	40%

Vertauscht man nämlich die Spalten und Zeilen miteinander so wie in der obigen Matrix geschehen, so ist zwar eine Multiplikation der Matrix mit dem Startvektor möglich, jedoch sind die Ergebnisse falsch. Man kann sich jedoch dann damit behelfen, dass man den Startvektor als "Zeilenvektor" (1000 4000 2000) schreibt und diesen mit der Matrix multipliziert.
Das Ergebnis ist dann natürlich wieder ein Zeilenvektor (vgl. Rechnung unten) !

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ & & & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ & & & 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ \hline 1000 & 4000 & 2000 & 1800 & 3900 & 1300 \end{array}$$

Wie man sieht gibt es verschiedene Möglichkeiten für die Reihenfolge der Matrizenverknüpfung .
Bei der umgekehrten Reihenfolge der Multiplikation muss die Matrix an der "Hauptdiagonalen" gespiegelt werden. Diese gespiegelte Matrix heißt **Transponierte** M^T von M.

D) Kodieren und Dekodieren:

Ein Text soll kodiert werden. Dazu wird er in eine Matrix M mit i Zeilen und k Spalten geschrieben. Den Buchstaben müssen noch Zahlen zugeordnet werden, damit man mit der Matrix rechnen kann. Die Matrix M wird anschließend mit einer sog. Kodiermatrix K multipliziert, so dass die kodierte, dem Empfänger zu übergebende Matrix C = M·K entsteht .
Die Kodiermatrix muss so gewählt werden, dass
a) eine Multiplikation mit M möglich ist,
b) eine Rückübersetzung von C mittels einer Dekodiermatrix D möglich ist !
Es muss dann für D gelten: C·D= (M·K)·D= M·K·D) = M·E = M
Am einfachsten wählt man K quadratisch , weil dann D die Inverse von K ist mit D·K = K·D = E .
Inversen lassen sich mithilfe von Computern (z.B. TI83) einfach ermitteln .
Hinweis: E ist die sogenannte Einheitsmatrix (Einsen auf der Hauptdiagonale, sonst Nullen) mit n Zeilen und n Spalten.

Beispiel für einen Text: G-KURS LINEARE ALGEBRA 1
Die Buchstaben des Textes müssen zunächst in Zahlen umgewandelt werden. Hierfür eignet sich der sog. ASCII-Zeichensatz (American Standard Code for Information Interchange).

Auszug aus der (erweiterten) ASCII-Tabelle:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	(	-
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	40	45

Die kleinen Buchstaben (a ... z) werden den Zahlen 97 bis 122 zugewiesen .
Ziffern: 0 ζ 48 1 ζ 49 2 ζ 50 3 ζ 51 ... 9 ζ 57
⌣ ("Leerzeichen" bzw. "Space") ζ 32, Ä ζ 196, Ö ζ 214, Ü ζ 220, ä ζ 228, ö ζ 246, ü ζ 252

Da der oben angegebene Text aus 24 Zeichen besteht (incl. der Leerzeichen) bietet sich eine Anordnung in einer 8 x 3 - Matrix an (möglich wäre auch 6 x 4 etc) .

$$M = \begin{pmatrix} G & - & K \\ U & R & S \\ \sqcup & L & I \\ N & E & A \\ R & E & \sqcup \\ A & L & G \\ E & B & R \\ A & \sqcup & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 & 45 & 75 \\ 85 & 82 & 83 \\ 32 & 76 & 73 \\ 78 & 69 & 65 \\ 82 & 69 & 32 \\ 65 & 76 & 71 \\ 69 & 66 & 82 \\ 65 & 32 & 49 \end{pmatrix}$$

Die so umgewandelte Matrix muss jetzt noch mit irgendeiner 3 x 3 - Matrix K multipliziert werden.

Wir wählen willkürlich $K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$M \cdot K = \begin{pmatrix} 71 & 45 & 75 \\ 85 & 82 & 83 \\ 32 & 76 & 73 \\ 78 & 69 & 65 \\ 82 & 69 & 32 \\ 65 & 76 & 71 \\ 69 & 66 & 82 \\ 65 & 32 & 49 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 352 & 236 & 311 \\ 499 & 332 & 415 \\ 365 & 257 & 330 \\ 428 & 281 & 346 \\ 403 & 252 & 284 \\ 429 & 288 & 359 \\ 418 & 283 & 365 \\ 275 & 178 & 227 \end{pmatrix} = C$$

Diese Ergebnismatrix C wird also dem Empfänger übergeben !

<u>Dekodierung:</u>

Für die Kodiermatrix $K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ eine geeignete <u>Dekodiermatrix</u> .

Überprüfung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also: $K \cdot D = D \cdot K = E$ (Einheitsmatrix)

<u>Fachsprache:</u> Die Dekodiermatrix D ist die **Inverse** zur Kodiermatrix K !

Durchführung des Dekodierens:

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 352 & 236 & 311 \\ 499 & 332 & 415 \\ 365 & 257 & 330 \\ 428 & 281 & 346 \\ 403 & 252 & 284 \\ 429 & 288 & 359 \\ 418 & 283 & 365 \\ 275 & 178 & 227 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 & 45 & 75 \\ 85 & 82 & 83 \\ 32 & 76 & 73 \\ 78 & 69 & 65 \\ 82 & 69 & 32 \\ 65 & 76 & 71 \\ 69 & 66 & 82 \\ 65 & 32 & 49 \end{pmatrix} = M$$

Wir erhalten wieder die Ausgangsmatrix M, die sich in den ursprünglichen Text umformen lässt .

Aufgaben:

1) Kodiere den Text TURBO-ABITUR unter Verwendung der 3x3-Kodiermatrix von oben.

2) Welcher Text verbirgt sich in der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 448 & 299 & 384 \\ 481 & 318 & 394 \\ 444 & 294 & 367 \\ 266 & 165 & 197 \end{pmatrix}$$

Lösungen:

Zu 1) TURBO-ABITUR besteht aus 12 Zeichen. Daher bietet sich eine 4 x 3 - Matrix an.

$$M = \begin{pmatrix} T & U & R \\ B & O & - \\ A & B & I \\ T & U & R \end{pmatrix} \rightarrow M = \begin{pmatrix} 84 & 85 & 82 \\ 66 & 79 & 45 \\ 65 & 66 & 73 \\ 84 & 85 & 82 \end{pmatrix}$$

Die Kodierung: $$M \cdot K = \begin{pmatrix} 84 & 85 & 82 \\ 66 & 79 & 45 \\ 65 & 66 & 73 \\ 84 & 85 & 82 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 505 & 336 & 418 \\ 414 & 269 & 314 \\ 401 & 270 & 343 \\ 505 & 336 & 418 \end{pmatrix}$$

Zu 2) Nach Multiplikation mit der Dekodiermatrix D und Rücktransformation mit dem ASCII ergibt sich das Wort TAUTOLOGIE .

<u>Für "Puristen":</u> Wenn die Kodiermatrix K nicht quadratisch sein soll

In diesem Fall ist die Ermittlung der Dekodiermatrix D schwieriger, denn man muss ein LGS lösen. Oft gibt es dann entweder gar keine oder sogar mehrere Dekodiermatrizen .

Einfaches Beispiel: $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Wir bilden dann $M \cdot K = C$ und dann $C \cdot D = M \cdot K \cdot D = M$

C ist dann eine 8 x 2 - Matrix .
Damit $(M \cdot K) \cdot D$ sowie $M \cdot (K \cdot D)$ überhaupt gebildet werden können, muss D über 2 Zeilen und 3 Spalten verfügen . Die Einheitsmatrix E ist dann eine 3 x 3 - Matrix.

Ansatz: $D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ Es folgt: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, also ein LGS.

Es entstehen 9 Gleichungen:	Das LGS ist dann:	rref anwenden:
a + 2d = 1 b + 2e = 0 c + 2f = 0 -a + d = 0 -b + e = 1 -c + f = 0 2a + 3d = 0 2b + 3e = 0 2c + 3f = 1	$\begin{array}{cccccc\|c} \cdot a & \cdot b & \cdot c & \cdot d & \cdot e & \cdot f & \cdot 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{cccccc\|c} \cdot a & \cdot b & \cdot c & \cdot d & \cdot e & \cdot f & \cdot 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$

In der drittletzten Zeile erscheint der Widerspruch $0 = 1$. Daher gibt es keine Lösung für D.
Offensichtlich ist die oben gewählte Matrix K für eine Kodierung ungeeignet !!!

<u>Neuer Versuch:</u> Ich wähle $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \\ -1 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ Ansatz: $D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & m \end{pmatrix}$ und $K \cdot D = E$

Hier zeigt sich, dass z.B. $D = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 10 \\ -8 & -6 & -7 \\ -4 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung von $K \cdot D = E$ ist (ohne Herleitung) .

E) Geometrische Abbildungen:

Ein Dreieck mit den Punkten A(2/1), B(6/-2), C(5/4) soll durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5\sqrt{3} \\ -0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{pmatrix}$ abgebildet werden.

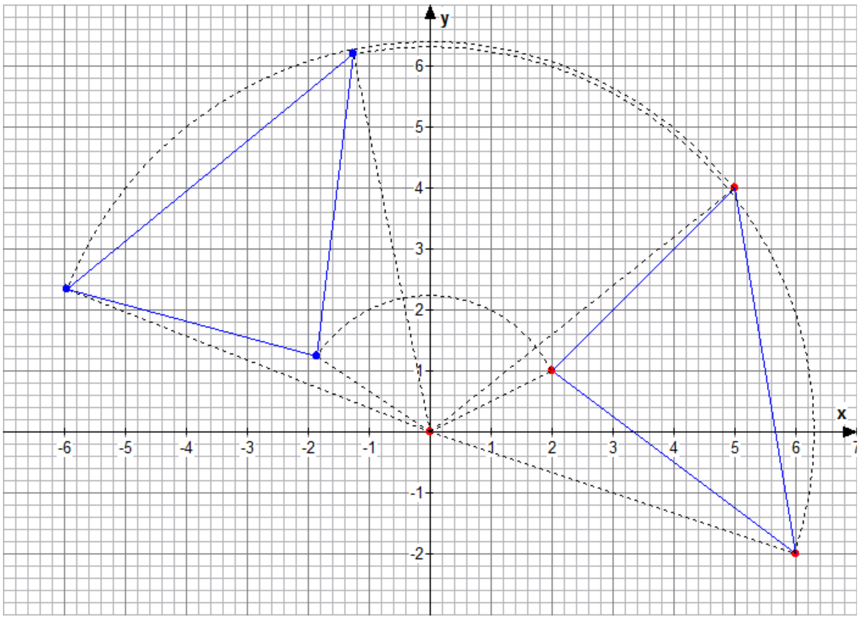
Z.B. ermittelt man den Bildpunkt A'(x'/y') durch folgende Rechnung (mit Zeilenvektoren !):

$$[x' \,;\, y'] = [2 \,;\, 1] \cdot \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5\sqrt{3} \\ -0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{pmatrix} = \left[-1 - 0,5\sqrt{3} \,;\, \sqrt{3} - 0,5\right] \approx [-1,87 \,;\, 1,23]$$

Ermittlung aller 3 Bildpunkte:

		$-0,5$	$0,5\sqrt{3}$
		$-0,5\sqrt{3}$	$-0,5$
2	1	$\approx -1,87$	$\approx 1,23$
6	-2	$\approx -1,27$	$\approx 6,2$
5	4	$\approx 5,96$	$\approx 2,33$

Wie man sieht, handelt es sich um eine Drehung $D_{(0;0);120°}$



Aufgaben:

1) Welche Matrix kann obige Drehung rückgängig machen ?

2) Was bewirkt die Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix}$?

Lösungen:

Zu 1) Es muss die Inverse M^{-1} zu M gefunden werden: $M^{-1} \cdot M = E$.

Man erhält nach Rechnung $M^{-1} = \begin{pmatrix} -0,5 & -0,5\sqrt{3} \\ 0,5\sqrt{3} & -0,5 \end{pmatrix}$

Zu 2) Es entsteht eine zentrische Streckung mit Streckzentrum Z(0/0) und Streckfaktor k=1,5 .

Bedarfsmatrizen (Prozessmatrizen):

Aus einer bestimmten Anzahl von Ausgangsstoffen werden Endprodukte hergestellt .
Zweckmäßiger Weise schreibt man die Anzahl der Ausgangsstoffe als Vektor $\vec{y}$ und die Anzahl der Endprodukte als Vektor $\vec{x}$.
Weiß man nun, wie viele Einheiten der Ausgangsstoffe nötig sind, um jeweils <u>eine</u> Einheit der Endprodukte herzustellen, so lässt sich eine Tabelle ("Bedarfsmatrix" A) aufstellen.

<u>Beispiel:</u>
Um die Endprodukte Kaffee und Milchkaffee herzustellen benötigt man die Ausgangsstoffe Kaffeepulver, Wasser und Milch.
Zur Herstellung einer Einheit (z.B. Tasse) Kaffee seien 5 Einheiten (z.B. Teelöffel) Kaffeepulver und 8 Einheiten Wasser erforderlich.
Zur Herstellung einer Einheit Milchkaffee seien 3 Einheiten Kaffeepulver, 10 Einheiten Wasser und 2 Einheiten Milch erforderlich.

Dies kann man in Tabellenform schreiben:

		Endprodukte	
		Kaffee	Milchkaffee
Ausgangs-stoffe	Kaffeepulver	5	3
	Wasser	8	10
	Milch	0	2

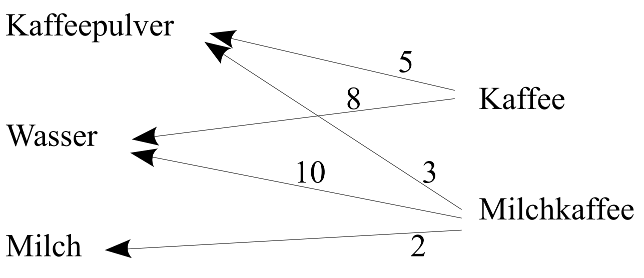
Ausgangsstoffe immer links in der Matrix anordnen, Endprodukte immer oben !

Das Zahlenschema kann auch als sog. "Bedarfsmatrix" $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 10 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ geschrieben werden .

Die <u>Bedarfsmatrix A</u> gibt an, wie viele Einheiten der Ausgangsstoffe benötigt werden, um eine Einheit der jeweiligen Endprodukte herzustellen . Mithilfe der Bedarfsmatrix A kann man bei gegebener Anzahl der Endprodukte die gesuchte Anzahl der Ausgangsstoffe berechnen.
Also: Gegeben ist $\vec{x}$, gesucht ist $\vec{y}$. Dann gilt: $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$

<u>Anmerkung:</u> Anstatt Bedarfsmatrix sagt man auch "**Prozessmatrix**".

<u>Übergangsgraph für obiges Beispiel:</u>



<u>Frage:</u> Warum gehen die Pfeilspitzen von den Endprodukten zu den Ausgangsstoffen ??
<u>Zur Beantwortung der Frage:</u>

Bei Bedarfsmatrizen gibt es 2 unterschiedliche Aufgabenstellungen:

Problem 1:

Die Anzahl der Endprodukte $\vec{x}$ ist bekannt und die Anzahl der Ausgangsstoffe $\vec{y}$ ist gesucht (s.o.) . " Wie viele Ausgangsstoffe werden zur Herstellung einer festgelegten Anzahl Endprodukte benötigt ? "
In diesem Fall müssen die Pfeilspitzen von den Endprodukten zu den Ausgangsstoffen gehen, weil die Anzahl der Endprodukte bekannt ist .

Beispiel: Es sollen 25 Tassen Kaffee und 40 Tassen Milchkaffee hergestellt werden.

Lösung: $\vec{y} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 10 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 245 \\ 600 \\ 80 \end{pmatrix}$

Also werden 245 Einheiten Kaffeepulver, 600 Einheiten Wasser und 80 Einheiten Milch benötigt.

Problem 2: (Umkehrung von Problem 1)

Die Anzahl der Ausgangsstoffe $\vec{y}$ ist bekannt und die Anzahl der Endprodukte $\vec{x}$ ist gesucht .
In diesem Fall müssen die Pfeilspitzen von den Ausgangsstoffen zu den Endprodukten gehen, weil die Anzahl der Ausgangsstoffe bekannt ist . Allerdings wird sich zeigen, dass dann auch nicht die Bedarfsmatrix zur Berechnung der Anzahlen eingesetzt werden kann (siehe unten).

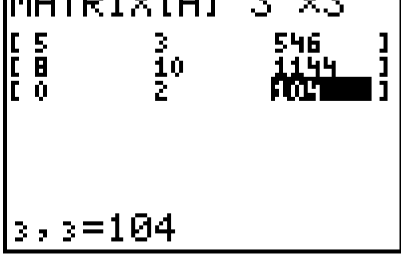
Beispiel: Es sollen 546 Einheiten Kaffeepulver, 1144 Einheiten Wasser und 104 Einheiten Milch zu Kaffee und Milchkaffee verarbeitet werden.

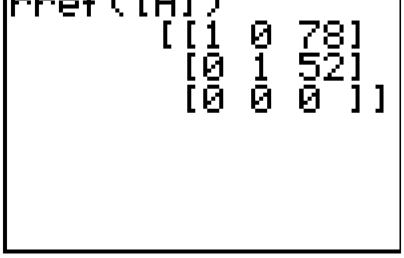
Lösung: $\begin{pmatrix} 546 \\ 1144 \\ 104 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 10 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 10 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 546 \\ 1144 \\ 104 \end{pmatrix}$

Bei quadratischen Matrizen lässt sich das Problem mit der inversen Matrix A^{-1} lösen.
Bei nicht quadratischen Matrizen aber muss ein LGS gelöst werden:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 10 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 546 \\ 1144 \\ 104 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5x_1 + 3x_2 \\ 8x_1 + 10x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 546 \\ 1144 \\ 104 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 5x_1 + 3x_2 & = & 546 \\ 8x_1 + 10x_2 & = & 1144 \\ 2x_2 & = & 104 \end{matrix} \right|$$

Dieses (überbestimmte) LGS wird mit rref (TI84) gelöst :





Eindeutige Lösung:

$x_1 = 78$
$x_2 = 52$

Also erhält man 78 Einheiten Kaffee und 52 Einheiten Milchkaffee .
Vorsicht ! Es gibt einige beachtenswerte Fälle:

1) Besitzt A **<u>mehr Zeilen als Spalten</u>**, so ergibt sich ein <u>überbestimmtes System</u>, welches hoffentlich eine Lösung besitzt. Theoretisch könnte auch ein Widerspruch auftreten.

<u>Beispiel:</u>

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 17 \\ 35 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 17 \\ 35 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} \cdot x_1 & \cdot x_2 & \cdot 1 \\ \hline 3 & 2 & 24 \\ 1 & 2 & 17 \\ 0 & 4 & 35 \end{array} \; rref \Rightarrow \begin{array}{ccc} \cdot x_1 & \cdot x_2 & \cdot 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

In der letzten Zeile ergibt sich der Widerspruch ($0 = 1$) . Also gibt es keine Lösung !

Dass sich in einzelnen Fällen aber durchaus eine Lösung ergeben kann zeigt das Beispiel

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 57 \\ 104 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 57 \\ 104 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} \cdot x_1 & \cdot x_2 & \cdot 1 \\ \hline 3 & 2 & 67 \\ 1 & 2 & 57 \\ 0 & 4 & 104 \end{array} \; rref \Rightarrow \begin{array}{ccc} \cdot x_1 & \cdot x_2 & \cdot 1 \\ \hline 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 26 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Die Lösung $x_1=5$ und $x_2=26$ ist eindeutig !

2) Besitzt A **<u>weniger Zeilen als Spalten</u>**, so ergibt sich ein <u>unterbestimmtes System</u> mit i.A. unendlich vielen Lösungen.

<u>Beispiel:</u> $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2550 \\ 3750 \end{pmatrix}$; die x_i sollen **<u>nicht negativ und ganzzahlig</u>** sein .

<u>(Mehrdeutige) Lösung des LGS :</u> $11x_1=3900-x_3$ und $11x_2=12450-18x_3$

Zwei mögliche Lösungen sind $\begin{pmatrix} 600 \\ 300 \\ 150 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 354 \\ 1122 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Insgesamt gibt es übrigens 63 Lösungen, falls alle 3 Zahlen aus der Menge $\mathbb{N}$ sind .

Im folgenden werden 2 Möglichkeiten dargestellt, wie man die Lösungen systematisch suchen kann.

Lässt man ein Computerprogramm suchen, so könnte der Algorithmus folgendermaßen aussehen:
Hier: Delphi 7 (mit einem "Memo" als Anzeigefeld)

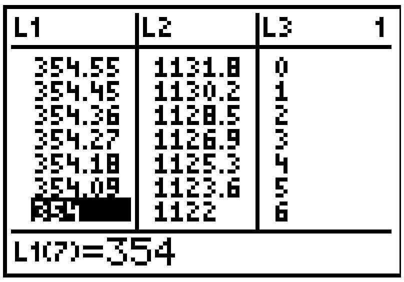
```
memo1.Lines.add('  x1        x2       x3');
n:=0;
for x3:=0 to 3900 do begin
  if ((3900-x3) MOD 11 = 0) and ((12450-18*x3) MOD 11 = 0) then begin
    x1:=(3900-x3) DIV 11;          x2:=(12450-18*x3) DIV 11;
    if (x1>=0) and (x2>=0) then begin
      inc(n);
      memo1.Lines.Add(IntToStr(x1)+'   '+IntToStr(x2)+'   '+IntToStr(x3)+'   ');
    end;
  end;
end;
memo1.Lines.Add('Es gibt genau '+IntToStr(n)+' Lösungen !');
```

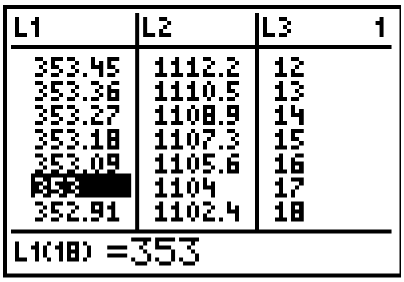
x1	x2	x3	x1	x2	x3	x1	x2	x3	x1	x2	x3
354	1122	6	338	834	182	322	546	358	306	258	534
353	1104	17	337	816	193	321	528	369	305	240	545
352	1086	28	336	798	204	320	510	380	304	222	556
351	1068	39	335	780	215	319	492	391	303	204	567
350	1050	50	334	762	226	318	474	402	302	186	578
349	1032	61	333	744	237	317	456	413	301	168	589
348	1014	72	332	726	248	316	438	424	300	150	600
347	996	83	331	708	259	315	420	435	299	132	611
346	978	94	330	690	270	314	402	446	298	114	622
345	960	105	329	672	281	313	384	457	297	96	633
344	942	116	328	654	292	312	366	468	296	78	644
343	924	127	327	636	303	311	348	479	295	60	655
342	906	138	326	618	314	310	330	490	294	42	666
341	888	149	325	600	325	309	312	501	293	24	677
340	870	160	324	582	336	308	294	512	292	6	688
339	852	171	323	564	347	307	276	523			

Es gibt genau 63 Lösungen !

Kommt es nur auf <u>einige</u> Lösungen an, so kann auch eine Verwendung der <u>Listen des TI84</u> helfen;

seq(X,X,0,400) STO L3
(3900-L3)/11 STO L1
(12450-18L3)/11 STO L2





G) Zahlenumwandlung (z.B. vom Dualsystem in das Dezimalsystem):

Es werden Zahlen mit 8 Bits (= 1 Byte) betrachtet.
Die Dualzahl $z = 10111001$ soll in das Dezimalsystem umgewandelt werden.
Da die Wertigkeiten der Ziffern von 128 ($= 2^7$) bis zu 1 ($= 2^0$) abnehmen, kann man die Umwandlung mit dem folgenden Skalarprodukt berechnen.

Lösung: $$z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 128 \\ 64 \\ 32 \\ 16 \\ 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 128 + 0\cdot 64 + \ldots + 1\cdot 1 = 185 \text{ (Dezimaldarstellung)}$$

Mit dem FALK-Schema rechnet man so:

$$\begin{array}{cccccccc|c} & & & & & & & & 128 \\ & & & & & & & & 64 \\ & & & & & & & & 32 \\ & & & & & & & & 16 \\ & & & & & & & & 8 \\ & & & & & & & & 4 \\ & & & & & & & & 2 \\ & & & & & & & & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 185 \end{array}$$

Anmerkung: Auch beim Matrixmodul des TI83 muss man dieses Schema anwenden. Man definiert eine Matrix A mit 1 Zeile und 8 Spalten sowie eine Matrix B mit 8 Zeilen und einer Spalte .
Das Ergebnis der Multiplikation A * B ist eine einelementige Matrix (1 Zeile und 1 Spalte) , in der das Element 185 steht . TI-Notation: [A]*[B] ENTER [[185]]

Übrigens funktioniert die Umkehrung (Dezimalzahl in Dualzahl) nicht so einfach, denn hier muss mit Division und ganzzahligem Rest gearbeitet werden.
185 : 128 = **1** Rest 57
57 : 64 = **0** Rest 57
57 : 32 = **1** Rest 25
25 : 16 = **1** Rest 9
usw.

Anhang 1: Rechenregeln für Matrizen $A=(a_{ik})$; spezielle Matrizen

Addition A+B :

Jedes Element (a_{ij}) wird zu jedem Element (b_{ij}) addiert .

Skalare Multiplikation rA :

Jedes Element (a_{ij}) wird mit der Zahl r multipliziert .

Matrixmultiplikation (siehe weiter unten bzw. siehe FALK-Schema)

Kommutativgesetz: AB = BA gilt nicht allgemein

Assoziativgesetz: (AB)C = A(BC) gilt allgemein !

Neutrales Element der Multiplikation (Einheitsmatrix E ; E ist immer quadratisch !) :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $A \cdot E = E^* \cdot A = A$

A muss nicht quadratisch sein, aber die Dimensionen von E und E* müssen so gewählt werden, dass in beiden Fällen eine Multiplikation möglich ist.

Neutrales Element der Addition (Nullmatrix N ; N muss nicht quadratisch sein):

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $A+N = N+A = A$

A muss nicht quadratisch sein, aber die gleiche Dimensionen wie N haben, damit in beiden Fällen eine Addition möglich ist .

Transponierte A^T einer Matrix A :

Hier werden die Zeilen und Spalten von A vertauscht, z.B. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

Inverse A^{-1} (bzw. A^I) einer Matrix A :

Es gilt: $A A^{-1} = A^{-1} A = E$ (A **muss quadratisch** sein)

Achtung: Nur sogenannte **reguläre** Matrizen (Determinante nicht 0) besitzen eine Inverse.
Matrizen, bei denen die Determinante 0 ist, heißen **singuläre** Matrizen .

Beispiele:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist **regulär**. Die Inverse ist $A^{-1} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 8 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 4 & -19 & 27 \\ -2 & 13 & -16 \end{pmatrix}$ ist **regulär**. Die Inverse ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} -47 & 11 & -2 \\ 10 & -2 & 1 \\ 14 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ist **singulär**, besitzt also keine Inverse. Elementarer Nachweis ?

Zum elementaren Nachweis der Singularität obiger Matrix :

Ansatz 1: AB = E , also $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dies führt auf ein 9 x 9 - LGS :

Es entstehen 9 Gleichungen mit 9 Unbekannten:

1. a + 2d - g = 1
2. b + 2e - h = 0
3. c + 2f - i = 0
4. -2a+g = 0
5. -2b+h = 1
6. -2c+i = 0
7. a-2d = 0
8. b-2e = 0
9. c-2f = 1

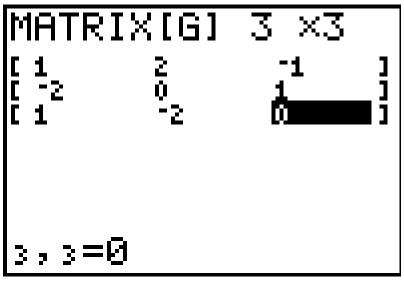
Man erkennt schnell die Widersprüchlichkeit dieses Systems:

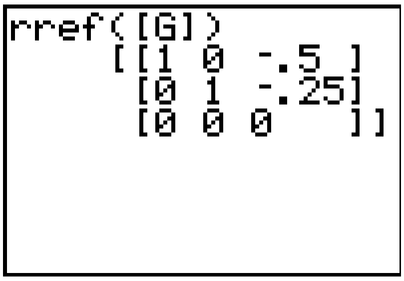
Aus der 4.Gl. folgt g=2a.
Ersetzt man in der 1.Gl. g durch 2a, so erhält man 2d-a=1.

Jedoch folgt aus der 7.Gl. 2d-a=0 .
2d-a kann aber nicht gleichzeitig 1 und 0 sein !

Ansatz 2:
Dieser Alternativansatz ist geschickter !

Wir wenden rref auf die Matrix A an und erkennen eine lineare Abhängigkeit der Zeilenvektoren:





Anhang 2: Multiplikation zweier Matrizen A und B (formale Betrachtung)

Gegeben sind zwei Matrizen A und B :

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & a_{ik} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & & a_{mn} \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \dots & & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & b_{ik} & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & & b_{np} \end{matrix}$$

A ist eine (m, n) - Matrix, da sie m Zeilen und n Spalten hat.
B ist eine (n, p) - Matrix, da sie n Zeilen und p Spalten hat.
Die Produktmatrix A • B nennen wir C . Es wird sich zeigen, daß C eine (m, p) - Matrix ist !

Multiplikationsregel: (beachte die Farben !)

1. Lege die i-te Zeile von A auf die k-te Spalte von B. (linkes Element von A oben !)
2. Multipliziere aufeinanderliegende Elemente miteinander.
3. Die Summe dieser Produkte (ein Skalarprodukt !) ist dann das Element c_{ik} .
4. Wiederhole die Schritte 1 bis 3 für i von 1 bis m und für k von 1 bis p !

C sieht dann allgemein so aus :

$$C := A \bullet B = \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \dots & & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & c_{ik} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & & c_{mp} \end{matrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 11 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cdot 1+3\cdot(-2)+11\cdot 4 & -4\cdot 0+3\cdot 1+11\cdot(-3) \\ 1\cdot 1+0\cdot(-2)+1\cdot 4 & 1\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -30 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Untersuche an obigem Beispiel, ob das Kommutativgesetz gilt .

Lösung:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & 11 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 11 \\ 9 & -6 & -21 \\ -19 & 12 & 41 \end{pmatrix}$$
Es gilt nicht !

Anhang 3: Linksinverse und rechtsinverse Matrizen - Rang einer Matrix

Def.: Gegeben sei eine **m ≼n** - Matrix A .
Eine n ≼m - Matrix X heißt **Linksinverse** von A, wenn gilt: $XA = E_n$.
Eine n ≼m - Matrix X heißt **Rechtsinverse** von A, wenn gilt: $AX = E_m$.

Beispiel (3 ≼2): $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Ansatz für die Rechtsinverse von A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ 4a+3d & 4b+3e & 4c+3f \\ 3a+4d & 3b+4e & 3c+4f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dieses LGS ist unlösbar (9 Gleichungen mit 6 Unbekannten) . Es gibt **<u>keine</u>** Rechtsinverse !

Ansatz für die Linksinverse von A:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+4b+3c & a+3b+4c \\ d+4e+3f & d+3e+4f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$\cdot a$	$\cdot b$	$\cdot c$	$\cdot d$	$\cdot e$	$\cdot f$	$\cdot 1$
1	4	3	0	0	0	1
1	3	4	0	0	0	0
0	0	0	1	4	3	0
0	0	0	1	3	4	1

Nach Anwenden von rref folgt:

$\cdot a$	$\cdot b$	$\cdot c$	$\cdot d$	$\cdot e$	$\cdot f$	$\cdot 1$
1	0	7	0	0	0	-3
0	1	-1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	7	4
0	0	0	0	1	-1	-1

Daher gibt es 4 Bedingungen:

$a + 7c = -3$
$b - c = 1$
$d + 7f = 4$
$e - f = -1$

Es gibt demnach beliebig viele Möglichkeiten für die Linksinverse:

Z.B.: $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ oder $X = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ usw. .

Satz: Eine m ≼n - Matrix A hat
- mindestens eine Linksinverse, wenn gilt: **rang**(A) = n
- mindestens eine Rechtsinverse, wenn gilt: **rang**(A) = m

<u>Anm.:</u> Der **Rang einer Matrix A** ist die Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren von A.

Z.B. ist der Rang von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ gleich 2, weil rref(A) liefert: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Weiteres Beispiel ($4 \not\leq 3$): $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Eine Rechtsinverse existiert hier nicht, wohl aber eine Linksinverse.
Ansatz für die Linksinverse von A:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a+b+2d & 2a+b+c-d & 3a+2c-d \\ e+f+2h & 2e+f+g-h & 3e+2g-h \\ i+j+2m & 2i+j+k-m & 3i+2k-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

9 Gleichungen mit 12 Unbekannten:

LGS:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	1
1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	2	1	1	-1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	3	0	2	-1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2	0
0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	1	-1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	2	-1	1

rref:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	1
1	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	2
0	1	0	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
0	0	1	-8	0	0	0	0	0	0	0	0	-3
0	0	0	0	1	0	0	5	0	0	0	0	-2
0	0	0	0	0	1	0	-3	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	0	1	-8	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	5	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-3	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-8	-1

9 Bedingungen für beliebig viele Lösungen:

a + 5d = 2 b - 3d = -1 c - 8d = -3 e + 5h = -2 f - 3h = 2 g - 8h = 3
i + 5m = 1 j - 3m = -1 k - 8m = -1

Mögliche Linksinverse von A: $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ -7 & 5 & 11 & 1 \\ -4 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

Probe: $X \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ -7 & 5 & 11 & 1 \\ -4 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ q.e.d.

Übrigens gilt hier: rang(A) = 3 !!