Der Binomialkoeffizient (Einführung):

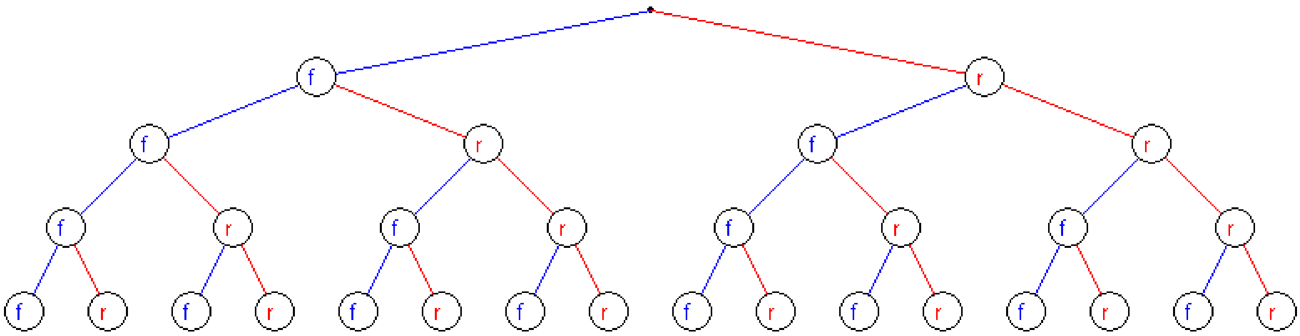
1) Wie viele Kombinationsmöglichkeiten gibt es , 2 Kugeln in 5 Kästchen anzuordnen ?

	x			x

Lösung:

2) Beispiel: 5 Fragen sollen beantwortet werden. Die Antwort kann richtig (r) oder falsch (f) sein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 2 Fragen richtig (und somit 3 Fragen falsch) zu beantworten ?

Baumdiagramm (n = 5 Stufen ; die Stufe Nr.5 muss noch ergänzt werden):



<u>Aufgabe:</u> Ergänze den Baum um die 5.Stufe und berechne die Wahrscheinlichkeit für „genau 2 Fragen richtig“

<u>Lösung:</u>

Beide Probleme hängen mit dem so genannten Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ (lies: „ n über k “) zusammen.

Was versteht man unter diesem Begriff bzw. dem Term ??

Zu 1)

Es gibt 10 Kombinationsmöglichkeiten, wenn man die Reihenfolge der beiden Kugeln nicht beachtet (sonst 20).

10 ergibt sich als Lösung von $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2}$ Warum ? (Baum betrachten !)

Zu 2)

Es gibt auch hier 10 Kombinationsmöglichkeiten ($\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2}$)

Das Abzählergebnis (10 Möglichkeiten) kann mithilfe des Pascalschen Dreiecks verdeutlicht werden:

		1	1			n = 1
		1	2	1		n = 2
	1	3	3	1		n = 3
1	4	6	4	1		n = 4
1	5	10	10	5	1	n = 5
k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	

Wie man sieht, steht k hier für die Anzahl der richtigen Fragen. Die Zahlen im Pascal-Dreieck (1; 5; 10; usw) geben die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten für k Richtige an .

Prüfe im Baumdiagramm: Die Wahrscheinlichkeit entlang **<u>eines</u>** Pfades mit k Treffern: P(X=k) = $\left(\frac{1}{3}\right)^{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$

Dann gilt bei $\binom{5}{k}$ Kombinationsmöglichkeiten: P(X=k) = $\binom{5}{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$

k = 0	k = 1	k= 2	k = 3	k = 4	k = 5
$1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5}$	$5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4}$	$10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3}$	$10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2}$	$5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{1}$	$1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{0}$

Fazit:

$\binom{n}{k}$ wird unter anderem verwendet als <u>Kurzschreibweise</u> für die Anzahl der Pfade, die bei n Wiederholungen zu k Treffern führen.

Interpretationen zum Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ (lies: „n über k“)

Bedeutung: *Anzahl der Möglichkeiten, aus insgesamt n Elementen k Elemente auszuwählen .*

Beispiele:

a) Von **n Kästchen** werden **k Kästchen angekreuzt** und (n-k) Kästchen nicht angekreuzt.

	x			x

Es gibt für jedes Kästchen 2 Möglichkeiten, entweder „Kreuz“ oder „kein Kreuz“. Dann gibt es für das Ankreuzen $\binom{n}{k}$ und für das Nichtankreuzen $\binom{n}{n-k}$ Kombinationsmöglichkeiten .

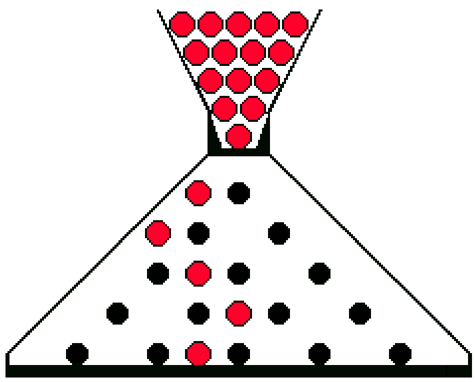
b) In einem **Wegenetz** hat man an jeder Wegegabelung genau 2 Möglichkeiten, nämlich vorwärts (nach unten) oder nach rechts zu gehen.

Start A				
				Ziel B

Man muss immer den **kürzesten Weg vom Startpunkt A zum Zielpunkt B** nehmen ! Es gibt n Wegegabelungen und k-mal die Möglichkeit, vorwärts (nach unten) zu gehen. Also gibt es (n-k)-mal die Möglichkeit, nach rechts zu gehen. Dann hat man $\binom{n}{k}$ bzw. $\binom{n}{n-k}$ Kombinationsmöglichkeiten, von A nach B zu kommen .

c) In einem **n-stufigen Baumdiagramm** mit je 2 Ästen auf jeder Stufe (Bernoulli-Kette der Länge n) soll die **Anzahl der Pfade** bestimmt werden, auf denen genau **k-mal der rechte Ast** gewählt wird (und somit (n-k)-mal der linke Ast). Hierfür gibt es $\binom{n}{k}$ Pfade .

d) Ein **GALTON-Brett** besitze n Nagelreihen und somit n+1 Fächer (die Fachnummern k werden von 0 bis n und von links nach rechts beschriftet) zum Einsammeln der Kugeln. Wie groß ist für jede Kugel die Anzahl der Wege bzw. Möglichkeiten, in dem Fach Nummer k (k von 0 bis n) zu landen.



Lösung: Es gibt $\binom{n}{k}$ Wege bzw. Möglichkeiten, im Fach Nummer k zu landen .

e) Im **Pascal-Dreieck** mit den Zeilennummern n=0, n=1, n=2, … und den Spaltennummern k von 0 bis n (siehe Grafik) steht $\binom{n}{k}$ in der Zeile Nummer n und der Spalte Nummer k . Dies ermöglicht u.a. eine schnelle Berechnung von Binomischen Formeln der Art $(a+b)^n$ bzw. $(a-b)^n$.

1						n = 0
1	1					n = 1
1	2	1				n = 2
1	3	3	1			n = 3
1	4	6	4	1		n = 4
1	5	10	10	5	1	n = 5
0	1	2	3	4	5	← k-Werte

Die Bernoulliformel mit P(X=k):

Lässt sich ein Problem als **Bernoulli-Versuch** deuten (Zufallsversuch mit genau 2 Ausgängen) und wird der Versuch n-mal unter gleichen Bedingungen (gleich bleibende Wahrscheinlichkeiten p und q=1-p auf jeder Stufe) durchgeführt, so spricht man von einer **Bernoulli-Kette** der Länge n. Dafür lässt sich ein n-stufiges Baumdiagramm mit je 2 Ästen zeichnen. Die Wahrscheinlichkeit p auf dem rechten Ast steht für **„Erfolg“** oder „Treffer“ , die Wahrscheinlichkeit q=1-p auf dem linken Ast steht für **„Misserfolg“** oder „Niete“ .

Wir haben eine Bernoulli-Kette mit n Stufen und einer Erfolgswahrscheinlichkeit (Trefferwahrsch.) p .
Dann ist die Misserfolgswahrscheinlichkeit (Nietenwahrscheinlichkeit) q=1-p .
p (und damit auch q) bleibt auf jeder Stufe gleich. k gibt immer die Anzahl der Erfolge (Treffer) an.
P(X=k) berechnet die Gesamtwahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem n-stufigen Bernoulli-Versuch k Erfolge vorkommen, d.h. dass k-mal p und (n-k)-mal q=1-p vorkommen .

Es gilt: $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Anmerkung: Die ***Zufallsgröße*** X ist eine Funktion (Zuordnung), die den Ergebnissen eines Zufallsversuchs bestimmte Zahlen zuordnet. Z.B. X = Anzahl der Sechsen beim 4-fachen Würfeln .
Für dieses Beispiel bedeutet dann P(X=3): Wahrscheinlichkeit für 3 Sechsen !

Einige Beispiele, bei denen die Bernoulliformel anzuwenden ist:

a) GALTON-Brett mit n=7 Nagelreihen (n+1 Fächern) und p = 0,5.
Mit welcher Wahrsch. P landet die Kugel im Fach Nummer k (k von 0 bis n) ?

Ansatz: Die Zufallsgröße X sei die Nummer des Faches (Auffangbehälters) .
Lösungsformel: $P(X = k) = \binom{7}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{7-k}$

b) 5-mal hintereinander telefonieren. Die Wahrsch., „durchzukommen“, betrage 85% . Wie groß ist die Wahrsch. P, jedesmal (genau 3-mal) „durchzukommen“ ?

Ansatz: X = Anzahl der erfolgreichen Wahlversuche .
Lösungsformeln: P(„jedesmal durchkommen“) = $P(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0{,}85^5 \cdot 0{,}15^0$

P(„genau 3-mal durchkommen“) = $P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}85^3 \cdot 0{,}15^2$

c) „Rauskommen“ beim Mensch-ärgere-dich-nicht. Jeder darf zunächst 3-mal hintereinander würfeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P, „herauszukommen“ ?
Hier gilt: n = 3 und p = 1/6 (für das Würfeln einer „6“) und q = 5/6 (keine „6“).
X = Anzahl der Sechsen beim 3-fachen Würfeln .
Gefragt ist nach P(mindestens eine „6“) , d.h. P(mindestens einmal Erfolg) = $P(X \geq 1)$
Lösungsformel: P(mindestens eine“6“) = P(1-mal “6“) + P(2-mal “6“) + P(3-mal “6“) =
$\binom{3}{1} \cdot (1/6)^1 \cdot (5/6)^2 + \binom{3}{2} \cdot (1/6)^2 \cdot (5/6)^1 + \binom{3}{3} \cdot (1/6)^3 \cdot (5/6)^0$
Anmerkung: Noch einfacher löst man dieses Beispiel mit der Gegenwahrscheinlichkeit P(0-mal „6“).
Es gilt dann; $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{3}{0} \cdot (1/6)^0 \cdot (5/6)^3$

Anmerkung zum „Rauskommen“ beim Mensch-ärgere-dich-nicht

In der Realität wird nicht immer 3-mal gewürfelt. Sobald nämlich eine Sechs gewürfelt wurde, wird gestoppt. Dies kann bereits nach dem ersten oder nach dem zweiten Wurf der Fall sein. Die folgenden Äste im Baumdiagramm werden dann nicht mehr eingezeichnet !

Aufgabe: Zeichne ein solches verkürztes Baumdiagramm und bestimme dann $P(X \geq 1)$. Was fällt auf ? Wie kann man sich das erklären ?

Weiterführende Aufgaben

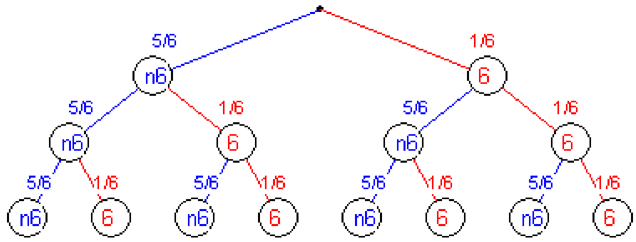
1) Ein Würfel wird 10-mal (20-mal) geworfen. Wie groß ist $P(X \geq 1)$?

2) Wie oft muss man einen Würfel mindestens werfen, damit mindestens eine „6“ mit mindestens 90%-iger (99%-iger) Wahrscheinlichkeit auftritt ? Gesucht ist eine analytische Lösung, keine Probierlösung !

Tipp: Verwende den Term für $P(X \geq 1)$ und überlege, wie man „mindestens 90%“ schreiben kann .

Lösung zum „Rauskommen-Problem“

Das vollständige Baumdiagramm sieht so aus (Anm.: n6 bedeutet: „keine 6“):



Für den rechten Ast muss man nur die Wahrscheinlichkeit P1 = 1/6 berechnen (Stopp bei der ersten „6“).
Für den linken Ast rechnet man P2 = 5/6*1/6 (Stopp) und P3 = 5/6*5/6*1/6 .
Addiert man diese 3 Wahrscheinlichkeiten (Additionssatz) , so erhält man
$P(X \geq 1) = 1/6+5/36+25/216 = 91/216 \approx 42{,}1\%$

Dies ist das gleiche Ergebnis wie bei der kompletten Berechnung mit
P1=1/6*1/6*1/6 + 1/6*1/6*5/6 + 1/6*5/6*1/6 + 1/6*5/6*5/6
P2 = 5/6*1/6*1/6 + 5/6*1/6*5/6
P3 siehe oben !

Die Ergebnisse sind gleich, weil die jeweils nachfolgenden weggelassenen Wahrscheinlichkeiten im Baum einen Gesamtsumme von 1 ergeben, was nach dem Multiplikationssatz mit den vorherigen Wahrscheinlichkeiten multipliziert werden müsste (nachprüfen !) .

Lösungen zu den weiterführenden Aufgaben

1) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (5/6)^{10} \approx 83{,}8\%$.
$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (5/6)^{20} \approx 97{,}4\%$.

2) Ansatz für **n Würfe**: $P(X \geq 1) \geq 90\% \Leftrightarrow 1 - P(X=0) \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - (5/6)^n \geq 0{,}9$

Umformen: $1- 0{,}9 \geq (5/6)^n \Leftrightarrow 1- 0{,}9 \geq (5/6)^n \Leftrightarrow 0{,}1 \geq (5/6)^n$

Exponent unbekannt, daher ein Logarithmusproblem: $n \geq \log_{\frac{5}{6}}(0{,}1) = \dfrac{\log(0{,}1)}{\log(\frac{5}{6})} \approx 12{,}6$

Also muss man einen Würfel mindestens 13-mal werfen, damit mindestens eine „6“ mit mindestens 90%-iger Wahrscheinlichkeit auftritt .

Für den Ansatz mit mindestens 99%-iger Wahrscheinlichkeit erhält man: $n \geq 26$

Verwendung des grafikfähigen Taschenrechners TI83

„n über k“ (nCr) findet man im Menü MATH – PRB – 3: z.B. 5 nCr 2 = 10

P(X=k) (binompdf) findet man im Menü DISTR – 0:

z.B. binompdf(7,0.5) liefert die folgende Liste(Zahlen gerundet!):

.008 .055 .164 .273 .273 .164 .055 .008

Diese Liste kann man zur besseren Betrachtung z.B. in L_2 abspeichern (STO L_2).
Die zugehörigen k-Werte gibt man in die Liste L_1 ein.

Aufgaben

1) Erstelle die oben genannten Listen und lasse den Rechner ein Histogramm zeichnen.
Übertrage die Zeichnung ins Heft.

2) Eine Binomialverteilung sei gegeben durch die Tabelle der P(X = k)-Werte:
0,17 0,36 0,31 0,13 0,03 0 (Werte gerundet)
Bestimme p ! Überprüfe deine Lösung.