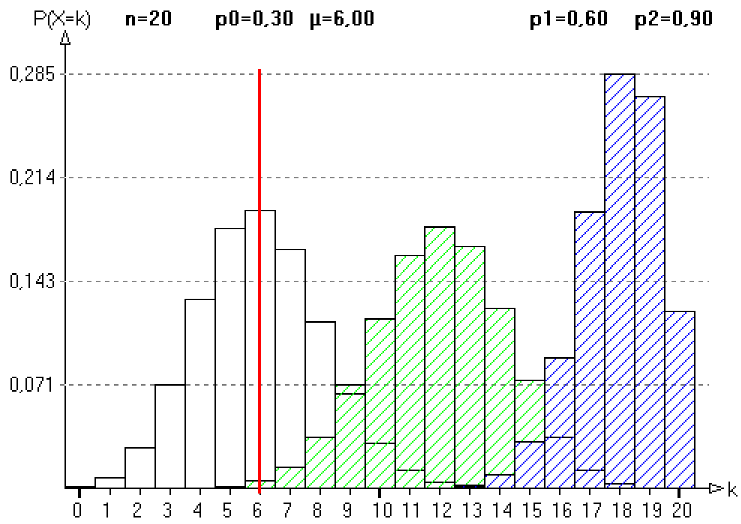
Erwartungswert (mit dem TI83) bei Binomialverteilungen Ac

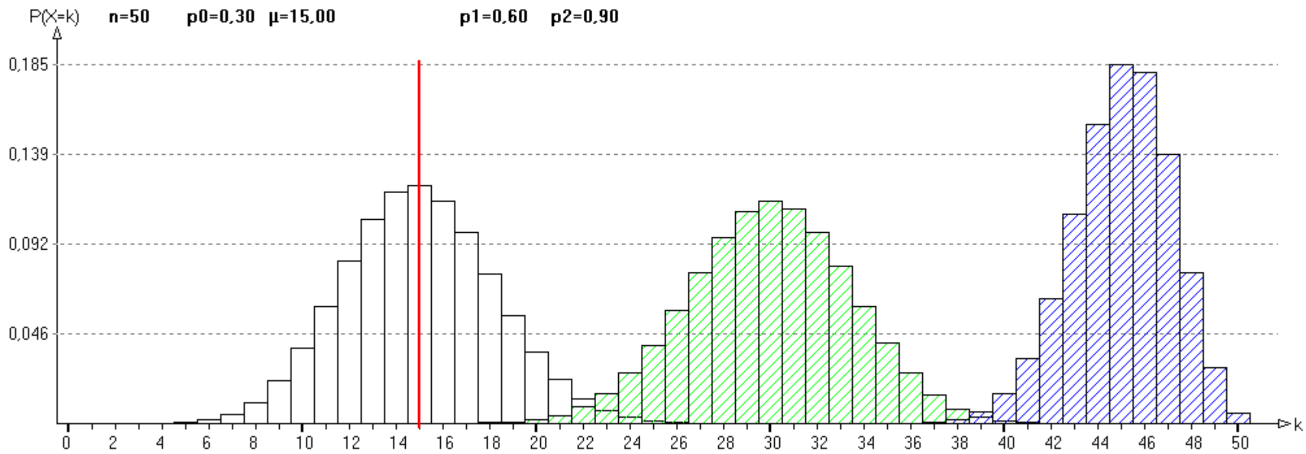
Für den Erwartungswert $E(X) = \mu$ einer Zufallsvariablen X gilt **allgemein** : Ist X eine Zufallsvariable, welche die Werte x_1 bis x_n durchlaufen kann, so ist $E(X) = \mu = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ \dots\ + x_n \cdot P(X = x_n)$

Für die **Binomialverteilung** B(n;p) mit n Stufen und Erfolgswahrscheinlichkeit p gilt speziell :

$$\boldsymbol{\mu = E(X) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + \ \dots\ + n \cdot P(X = n)}\text{ , wobei } \boldsymbol{P(X = k) =} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1- p)^{n-k}$$

Grafische Beispiele für die Binomialverteilung:





Für größer werdendes n und für größer werdendes p scheint die Maximalstelle k (der Erwartungswert E(X)) immer größer zu werden (weiter rechts zu liegen). Man kann vermuten, dass er vom Produkt np abhängt.

Man kann beweisen, dass hier **$E(X) = n \cdot p$** gilt ! Der Beweis ist schwierig !

E(X)=n*p verifizieren anhand von Beispielen:

Im Hauptbildschirm geben wir die Befehle ein zum Füllen der ersten 3 Listen und zur Berechnung der Summe der Elemente der Liste 3:

seq(X,X,0,50) STO L1	erzeugt die k-Werte
binompdf(50,.3) STO L2	erzeugt die P(X=k)-Werte
L1*L2 STO L3	erzeugt k*P(X=k) für k von 0 bis 50
sum(L3) liefert dann den Wert 15.	Dies entspricht E(X) =n*p = 50*0,3 !

Alternative zu sum(L3): STAT CALC 1-Var Stats L1,L2 liefert unter anderem $\bar{x}$ = 15 !

Varianz und Standardabweichung (mit dem TI83) bei Binomialverteilungen Ac

Für die Varianz $V(X) = \sigma^2$ einer Zufallsvariablen X gilt allgemein (vgl. E(X) oben):
$V(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot P(X = x_2) + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)$
Anm.: Die Varianz ist das Quadrat der Standardabweichung, also $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Für die **Binomialverteilung** B(n;p) mit n Stufen und Erfolgswahrscheinlichkeit p gilt speziell :

$$\boldsymbol{\sigma^2 = V(X) = (0 - \mu)^2 \cdot P(X = 0) + (1 - \mu)^2 \cdot P(X = 1) + \dots + (n - \mu)^2 \cdot P(X = n)}$$

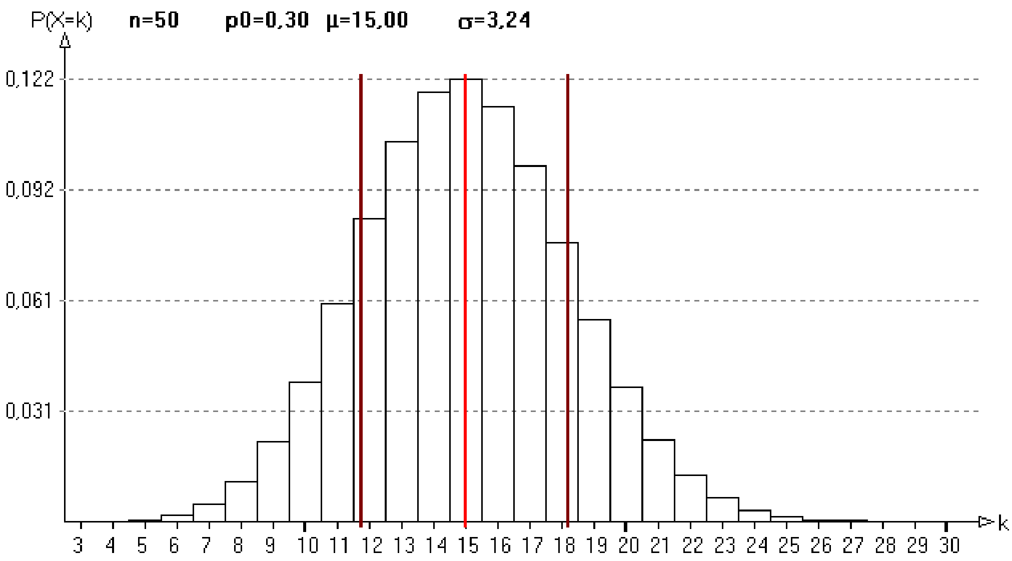
Man kann beweisen, dass gilt: $V(X) = n \cdot p \cdot q$ Also: $\boxed{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}}$

<u>V(X)=n·p·q verifizieren anhand von Beispielen:</u>
Im Hauptbildschirm geben wir die Befehle ein zum Füllen der ersten 3 Listen und zur Berechnung der Summe der Elemente der Liste 3:

seq(X,X,0,50) STO L1	erzeugt die k-Werte
binompdf(50,.3) STO L2	erzeugt die P(X=k)-Werte
L1*L2 STO L3	erzeugt k*P(X=k) für k von 0 bis 50
sum(L3) liefert dann den Wert **15**.	Dies entspricht E(X)=n*p = 50*0,3 !
$(L1-15)^2$ STO L4	erzeugt die $(k-\mu)^2$ – Werte
L4*L2 STO L5	erzeugt $(k-\mu)^2$*P(X=k)
sum(L5)	erzeugt V(x) = 10,5
√(Ans)	erzeugt σ = 3,24…

<u>Alternative zu sum(L5):</u> STAT CALC 1-Var Stats L1,L2 liefert unter anderem σx = 3.24… .

Grafisches Beispiel:



<u>Ergänzung:</u>

Bei der Auswertung von n Daten mit k absoluten oder relativen Häufigkeiten verwendet man die sogenannte „empirische Standardabweichung“ σ_{n-1} (beim TI83 mit Sx bezeichnet).
Hier wird die Wahrscheinlichkeit P(X=k) durch die jeweilige relative Häufigkeit h_i ersetzt, wobei allerdings aus praktischen Gründen nicht $h_i = \frac{H_i}{n}$, sondern $h_i = \frac{H_i}{n-1}$ verwendet wird ! (größerer Streubereich)

Es gilt dann: $\sigma_{n-1} = \sigma_n \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}}$