Mittelwert, Erwartungswert und Standardabweichung

Ac

Definitionen für Mittelwert und Erwartungswert:

Für den Mittelwert $\bar{x}$ einer Datenreihe mit n Merkmalen von x_1 bis x_n, welchen die n rel. Häufigkeiten h_1 bis h_n zugeordnet sind gilt **allgemein** : $\bar{x} = x_1 \cdot h_1 + x_2 \cdot h_2 + \ldots + x_n \cdot h_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot h_i$

Achtung: Die Anzahl der Daten ist in der Regel größer als n, weil die x_i mit abs.Häufigkeiten H_i belegt sind !

Falls aber speziell alle $H_i = 1$ sind, so gilt $h_i = \frac{1}{n}$ und $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$

Für den Erwartungswert $E(X) = \mu$ einer Zufallsvariablen X gilt **allgemein** :
Ist X eine Zufallsvariable, welche die Werte x_1 bis x_n durchlaufen kann, so ist

$E(X) = \mu = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$

Die beiden Formeln entsprechen einander, aber es gibt einen entscheidenden Unterschied:
- Der Mittelwert ist ein praktischer Wert, der bei (Mess)-Daten verwendet wird und immer mit relativen oder absoluten Häufigkeiten verknüpft ist !
- Der Erwartungswert ist ein theoretischer Wert, der bei Verteilungen auftritt und somit immer mit Wahrscheinlichkeiten verknüpft ist !

Praktische Berechnungen (mit den **Listen** des GTR):

1) In einer Tabelle seien Messdaten (Strecken) mit absoluten Häufigkeiten gegeben. Fülle die Tabelle aus:

x_i	H_i	h_i	$x_i \cdot h_i$
12,7	3		
11,4	6		
14,1	4		
9,3	2		
10,2	5		

Summe = $\bar{x}$ =

2) In einer Tabelle sollen die zur jeweiligen Augenzahl gehörenden Wahrscheinlichkeiten eingetragen und der Erwartungswert μ für „X: Werfen eines Würfels“ berechnet werden.

Augenzahl k	P(X=k)	k·P(X=k)
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Summe = μ =

GTR - Berechnungen (TI83):

Stehen die x_i und die h_i (bzw. $P(X=x_i)$) in den Listen L_1 und L_2, so liefert STAT CALC 1-Var Stats L_1,L_2 unter anderem die gesuchten Kennzahlen.

Schließlich noch die Definitionen für Varianz und Standardabweichung:

Für die Varianz $V(X) = \sigma^2$ einer Zufallsvariablen X gilt **allgemein** :
$V(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot P(X = x_2) + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)$
Anm.: Die Standardabweichung ist die Wurzel aus der Varianz, also $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Ergänzende Bemerkungen:

1) Die Varianz ist lediglich für die Zwischenrechnung wichtig, sie wird ansonsten kaum verwendet.

2) Bei der Standardabweichung wird (von der Namensgebung her) nicht wie beim Mittelwert und dem Erwartungswert zwischen Praxis und Theorie unterschieden.

3) Bei der Auswertung von n Daten mit k abs. oder rel. Häufigkeiten verwendet man in der Praxis (NatWiss, Soziologie, Medizin, etc.) die sog. „empirische Standardabweichung" σ_{n-1} (beim TI83 mit Sx bezeichnet).
Hier wird aus praktischen Gründen nicht $h_i = \frac{H_i}{n}$, sondern $h_i = \frac{H_i}{n-1}$ verwendet ! (größerer Streubereich)

Es gilt dann: $\sigma_{n-1} = \sigma_n \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}}$

Praktische Berechnung (die Tabelle zur Ermittlung von $\bar{x}$ bzw. μ wird lediglich erweitert):

x_i	H_i	h_i	$x_i \cdot h_i$	$(\bar{x} - x_i)^2 \cdot h_i$
12,7	3			
11,4	6			
14,1	4			
9,3	2			
10,2	5			

Summe = $\bar{x}$ = Summe = V(X) = , also $\sigma = \sigma_n$ = .

GTR - Berechnungen (TI83):

Der Wert für die Standardabweichung kann in der Statistikauswertung (STAT CALC 1-Var Stats L_1,L_2) gefunden werden unter σx .