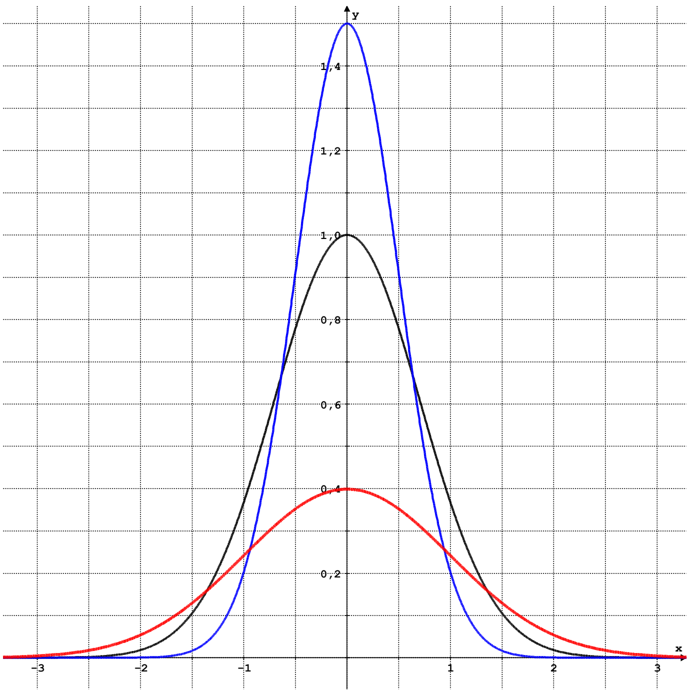
# NORMALVERTEILUNG UND DICHTEFUNKTIONEN  Ac

**Einführung der Normalverteilung als Approximationsfunktion der Binomialverteilung**

Da die Binomialverteilung für große n das Aussehen einer Glockenkurve besitzt ist es nahe liegend, sie durch eine stetige Funktion zu approximieren.

Glockenkurven kann man z.B. durch die Gleichung $f(x) = a \cdot e^{-bx^2}$ mit $a, b > 0$ beschreiben.

Anm.: In NW und Technik sind Funktionen der Form $f(x) = a \cdot e^{-bx^2}$ von besonderer Bedeutung.




Die Grafik zeigt folgende Funktionen der Form

$$f(x) = a \cdot e^{-bx^2}$$

Blau:
$a = 1{,}5$ ; $b = 2$

Schwarz:
$a = 1$ ; $b = 1$

Rot:
$a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}399$ ; $b = 0{,}5$

.

Zur Approximation einer Binomialverteilung $B_{n;p}$ müssen noch folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

1) Die Fläche zwischen Graph und x-Achse muss den Inhalt 1 haben ( $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ ).

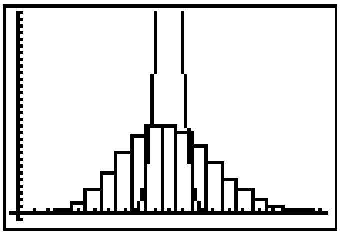
2) Das Maximum des Graphen muss sich an der Stelle $\mu$ (Erwartungswert) befinden.

Man kann durch Variation von a und b Beispiele finden, für die 1) zutrifft, z.B. a=0,564 b=1 oder etwa a=0,399 b=0,5. (Nachprüfen durch Integration !)

Zur Erfüllung der Bedingung 2) muss man zunächst den Graphen um $\mu$ nach rechts verschieben, also $f(x) = a \cdot e^{-b(x-\mu)^2}$ . Wir betrachten das Beispiel $B_{100;0,1}$ . Vergleich mit $f(x) = 0{,}564 \cdot e^{-(x-10)^2}$ (TI83) .
Da hier $\mu$=10 und $\sigma$=3 gilt reicht es aus die Verteilung im Intervall [0;20] darzustellen !

Im STAT-Menü erzeugen wir die Liste L1 mit **seq(X,X,0,20)** und die Liste L2 mit **binompdf(100,0.1,L1)** , welche im STATPLOT-Menü angemeldet werden als Histogramm.
Die Funktion f(x) definieren wir unter Y= .

```
WINDOW
 Xmin=-.5
 Xmax=20.5
 Xscl=1
 Ymin=-.01
 Ymax=.3
 Yscl=.01
 Xres=1
```

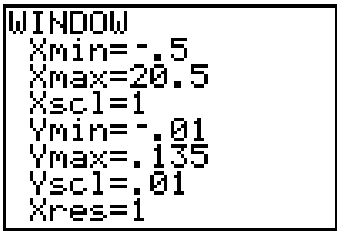


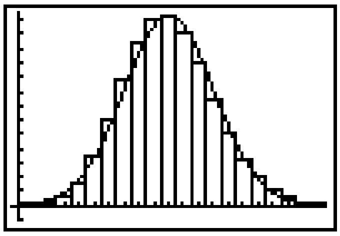
Wir stellen fest, dass f(x) nicht „passt“ , wenn a=0,564 und b=1 gelten.

Man kann unschwer erkennen, dass noch eine Stauchung in y-Richtung sowie eine Streckung in x-Richtung erforderlich ist.

Nach längerem Probieren findet man etwa
a=0,133   b=0,055 .

Die Grafik zeigt, dass nun alles passt.
$f(x) = 0{,}133 \cdot e^{-0{,}055(x-10)^2}$



Bildet man die Kehrwerte der gefundenen Näherungen für a und b , so erhält man
$1/a = 1/0{,}133 \approx 7{,}5$   und   $1/b = 1/0{,}055 \approx 18$ .
Beim Ergebnis 18 kann man sofort erkennen, dass es sich vermutlich um $2\sigma^2$ handelt.

Daher vermuten wir, dass $b = \frac{1}{2\sigma^2}$ gilt .   Daher:   $f(x) = a \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ .

a hat den Näherungswert 0,133.  Was aber muss exakt für a eingesetzt werden ? Gibt es einen Zusammenhang zwischen 0,133 und σ ?  Schwer zu überschauen !

Man kann beweisen, dass $a = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ gilt (nachprüfen!).   Daraus ergibt sich die sogenannte

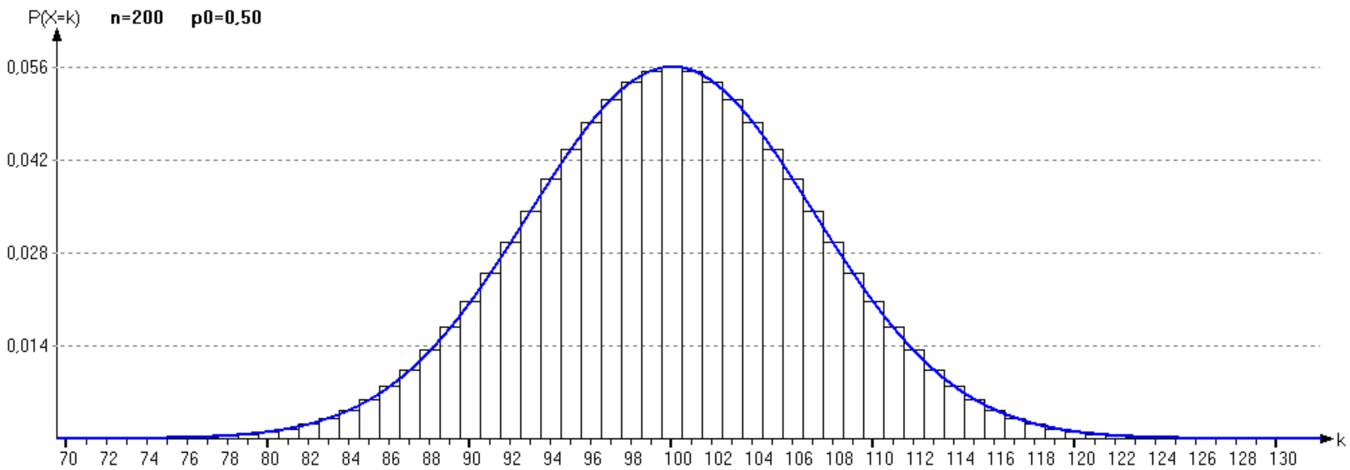
**Normalverteilungsfunktion**   $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-0{,}5\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

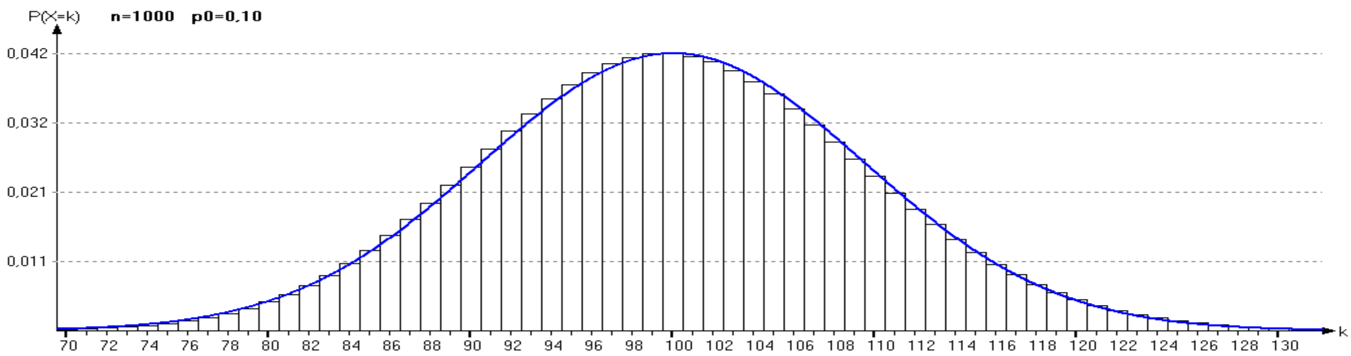
Hinweis:  Der TI83 berechnet diese Funktionswerte mittels **normalpdf(x,μ,σ)** .

Achtung:  Zu einem vorgegebenen Erwartungswert μ kann es beliebig viele Binomialverteilungen geben. σ ändert sich dann entsprechend und somit auch die approximierende Normalverteilung !

Wegen $\mu = n \cdot p \Leftrightarrow p = \mu/n$ kann man $\sigma^2 = \mu \cdot (1-p) = \mu \cdot (1-\mu/n)$ und somit $\sigma = \sqrt{\mu\left(1-\frac{\mu}{n}\right)}$ berechnen.

Beispiel:   Für μ=100 kann man etwa  n=200; p=0,5; σ=7,1  und  n=1000; p=0,1; σ=9,5  betrachten.




Man sieht, dass die Verteilung breiter und flacher wird (bei gleichem Erwartungswert) !

Wie kann man mithilfe von f  Wahrscheinlichkeiten P berechnen ??

Für die Binomialverteilung kann man als Näherungswert von P(X=k) normalpdf(k,$\mu$,$\sigma$) verwenden.
Für allgemeine Normalverteilungen und für Intervallwahrscheinlichkeiten funktioniert das aber nicht .

Allgemeinerer Ansatz, der auch für Intervalle funktioniert:
Um P(X=3) zu berechnen müsste man die **Fläche** unter der Kurve im Intervall [2,5 ; 3,5] berechnen.

Für obiges Beispiel mit $\mu$=10 und $\sigma$=3 gilt dann $P(X=3) = \int_{2,5}^{3,5} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-0,5(\frac{x-10}{3})^2}$ = fnInt…. ≈ 0,0089.

Prüft man mit binompf (100,0.1,3) nach, so ergibt sich der Wert 0,0059. Keine gute Approx !
Andere Stelle: P(X=10)=0,1324 (mit Integral) und 0,1319 (mit binompdf) . Wesentlich besser !

Offensichtlich gilt für Binomialverteilungen folgende Näherungsformel :

$$\mathbf{P(k_1<X\leq k_2) \approx} \int_{k1-0,5}^{k1+0,5} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-0,5(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$ **(Näherungsformel von de Moivre-Laplace)**

Brauchbare Werte liefert diese Formel, falls **$\sigma$>3** gilt (LAPLACE-Bedingung).
Hinweis: Der TI83 berechnet obige Wahrscheinlichkeiten mittels **normalcdf(k1-.5,k2+.5, $\mu$, $\sigma$)**.

Einige Beispiel dazu (n, p, k1,k2 gegeben)

| **n und p** | **[k1;k2]** | **Berechnung mit normalcdf** | **Berechnung mit binomcdf** |
|---|---|---|---|
| n=50 p=0,4 | [8;25] | 0,9437 | 0,9426 |
| n=300 p=0,7 | [150;210] | 0,5251 | 0,5218 |
| n=2000 p=0,6 | [1190;1300] | 0,6841 | 0,6845 |
| n=20 p=0,3 | [3;7] | 0,7241 | 0,7368 |

**Beachte: Die Funktionswerte der Normalverteilung sind keine Wahrscheinlichkeiten, sondern Änderungsraten von Wahrscheinlichkeiten (also Ableitungen!).**
**Man nennt diese Änderungsraten f auch Dichtefunktionen (siehe unten) .**
**Die Wahrscheinlichkeiten sind die Flächeninhalte der Flächen zwischen f und der x-Achse !**

**Die Normalverteilung ( $\varphi(x)$ ) nimmt eine Sonderstellung** in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein:
- die mathematische und numerische Behandelbarkeit im Vor-Computerzeitalter;
- nach dem zentralen Grenzwertsatz und vielen anderen Grenzwertsätzen ist die Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße zumindest approximativ durch die $\varphi$-Funktion berechenbar, wenn die Zufallsgröße ihre Werte unter dem Einfluss **mehrerer unabhängig additiv wirkender Faktoren** annimmt.

Beispiele für solche Verteilungen:
- Verteilung von Körpergröße und Gewicht bei Personen eines Geschlechts und einer Altersgruppe;
- Lebensdauer technischer Produkte;
- Treffgenauigkeit bei Schießwettbewerben.

Gegenbeispiele:
- Häufigkeitsverteilung der Dauer des Schulbesuchs;
- Anzahl der Kinder bei deutschen Familien;
- Abweichungen vom Fahrplan;
- Alterspyramide der deutschen Bevölkerung.

# Dichtefunktionen

Wir haben oben die Normalverteilungsfunktion f(x) als Dichtefunktion bezeichnet. Was versteht man allgemein unter Dichtefunktionen ?

Eine **Dichtefunktion f (**auch Wahrscheinlichkeitsdichte genannt; engl. probability density function) ist eine Funktion einer <u>stetigen (oder stückweise stetigen) Zufallsgröße</u> X, für die gilt:

(1) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(2) $P(X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$

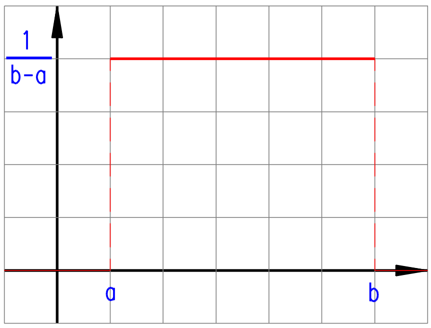
(3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

<u>Beispiele für Dichtefunktionen:</u>

1) Normalverteilung, Exponentialverteilung, Cauchy-Verteilung usw. (vgl. Aufgaben unten)

2) Zufallsgenerator mit

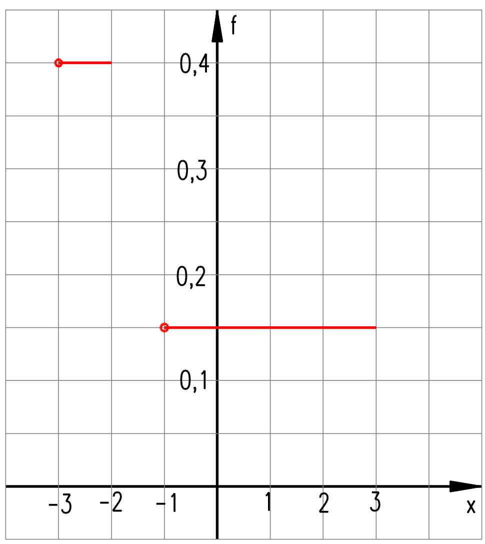
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & falls \quad a \leq x \leq b \\ 0 & sonst \end{cases}$$




3) Dichtefunktionen können aber auch aus Histogrammen konstruiert werden, indem man als Funktionswerte bzw. Funktionsteile die oberen Rechteckslinien des Histogrammes verwendet, z.B:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}40 & falls \quad -3 < x \leq -2 \\ 0{,}15 & falls \quad -1 < x \leq 3 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Wie man sieht ist hier das Integral über dem ganzen reellen Bereich =1 und es gilt f(x)≥0 .



**Aufgaben:**

1) Gegeben seien f(x) = $a \cdot e^{-bx^2}$ mit

a) a=1 b=1

b) a=$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ b=2

c) a=0,4 b=0,5

d) a=0,2 b=0,1

Welchen der Graphen kann man als Graph einer Dichtefunktion bezeichnen ?

2) Untersuche, ob eine Dichtefunktion vorliegt:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & falls \quad x < 0 \\ \frac{1}{2\pi} & falls \quad 0 \le x \le 2\pi \\ 0 & falls \quad x > 2\pi \end{cases}$$

3) Welchen Wert muss k haben, so dass f eine Dichtefunktion ist ?

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot x\,, & falls \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & für\ alle\ sonstigen\ x \in IR \end{cases}$$

4) a) Berechne Extrem- und Wendepunkte von Funktionen der Form f(x) = $a \cdot e^{-bx^2}$ .

b) Berechne auch $\mu$ und $\sigma$ mittels Integraldefinitionen .

5) a) Zeige, dass f(x)=$\frac{1}{\pi\,(1+x^2)}$; $x \in IR$ eine Dichtefunktion ist (CAUCHY-Verteilung).

Vergleiche mit der Normalverteilung. Ermittle die Integralfunktion zur unteren Grenze $-\infty$ .

b) Berechne auch $\mu$ und $\sigma$ mittels Integraldefinitionen

**Einige Lösungen:**

1) In b) und c) liegen Dichtefunktionen vor ( in c) nur näherungsweise). a), d) keine Dichtef.

4) a) f '(x) = $-2abx\cdot e^{-bx^2}$  f ''(x) = $-2abx\cdot e^{-bx^2}$

Es gibt stets einen Hochpunkt H(0/a) .

Die beiden Wendepunkte sind WP1( $-\sqrt{\frac{1}{2b}}$ / a· $e^{-0,5}$ ) und WP2( $\sqrt{\frac{1}{2b}}$ / a· $e^{-0,5}$ )

4.b) Ansatz $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot a\cdot e^{-bx^2}dx = [-\frac{a}{2b}e^{-bx^2}]_{-\infty}^{\infty} = 0+0=0$

Wie zu erwarten war, liegt $\mu$ bei allen Dichtefunktionen der obigen Form an der Stelle x = 0 .

Ansatz $\sigma^2$ =

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot a\cdot e^{-bx^2}dx = [-\frac{a}{2b}\cdot x\cdot e^{-bx^2}]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\infty}a\cdot e^{-bx^2}dx$$

Der erste Teilterm ist 0 (Grenzwertbetrachtung !) und das Integral am Schluss ist 1 (wegen der Eigenschaft der Dichtefunktion. Daher folgt $\sigma^2 = \frac{1}{2b}$ und somit $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2b}}$ . Man sieht, dass dies auch der x-Wert des zweiten Wendepunktes ist !

**Fazit: Die Dichtefunktionen der Form f(x) = $a\cdot e^{-bx^2}$ mit a, b > 0 haben ihren Hochpunkt an der Stelle x=$\mu$ (Erwartungswert der Zufallsgröße X) und ihre beiden Wendepunkte an den Stellen -$\sigma$ und +$\sigma$ (Standardabweichung von X) !**

Zu 5) a) Die Cauchy-Verteilung ist eine Dichtefunktion, weil

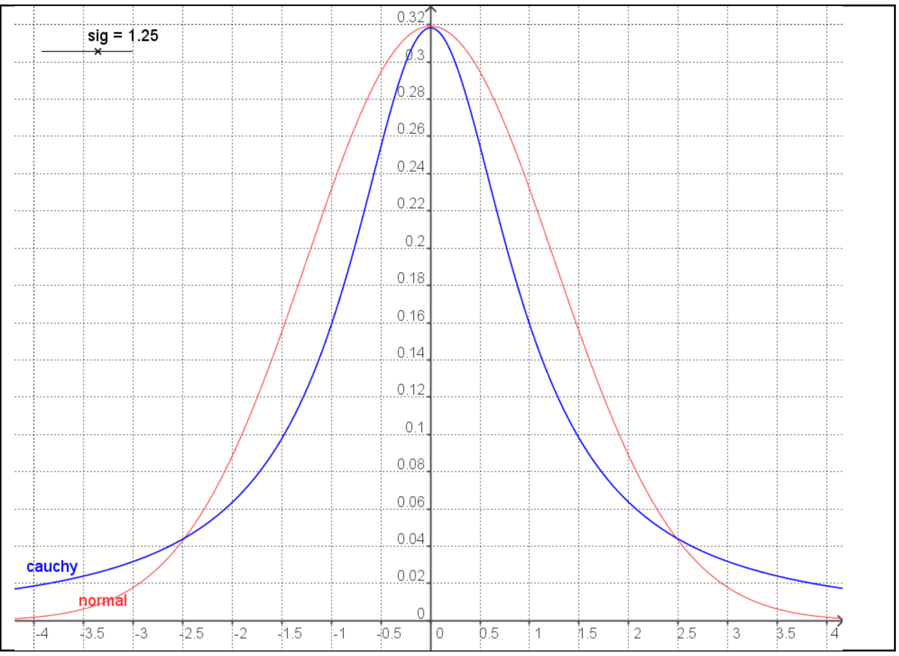
- $f(x) \geq 0$

- Das Integral über dem reellen Intervall den Wert 1 hat .
  Beweis: Die Stammfunktion von $f(x) = 1/(1+x^2)$ ist $F(x) = \arctan(x)$ .
  Die Cauchy-Verteilung hat dann die Stammfunktion $F(x) = \arctan(x)/\pi$ .
  Integriert man von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhält man $\pi/2/\pi - (-\pi/2/\pi) = 1$ q.e.d.

Man kann die Cauchy-Verteilung der Normalverteilung (mit $\mu=0$) gegenüberstellen (Grafik) und erkennt, dass beide Verteilungen neben gemeinsamen Eigenschaften (z.B. Glockenform) auch unterschiedliche Eigenschaften besitzen (Breite der Glocke, Steigungseigenschaften von f etc.) .

Integralfunktion der CAUCHY-Vert. bzgl. $a = -\infty$:

$$\mathbf{I_{-\infty}(x) = 0{,}5 + \arctan(x)/\pi}$$



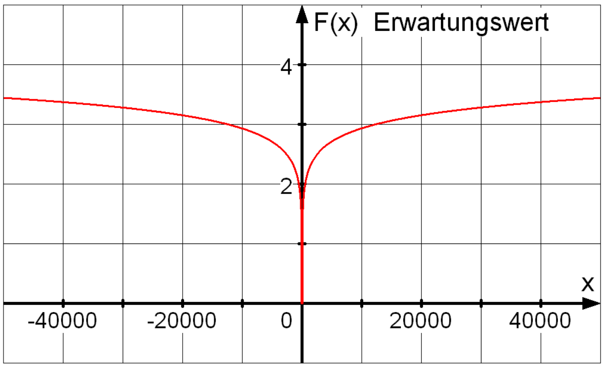

b) Erwartungswert (CAUCHY-V.): $$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\pi\,(1+x^2)}\,dx = \infty$$

Standardabweichung (CAUCHY-V.): $$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\pi\,(1+x^2)}\,dx = \infty$$

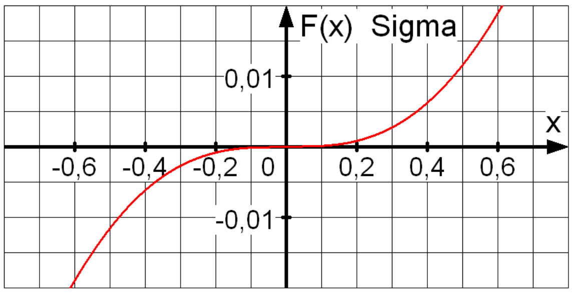
In beiden Fällen ist das Integral **an den Stellen $-\infty$ und $\infty$ nicht definiert !** (s. unten)

<u>Ergänzung:</u> Ermitteln der Stammfunktionen für $\mu$ und $\sigma$ (mittels CAS-System, z.B. Derive):

Zu $\mu$ : $F(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{2\pi}$




Zu $\sigma$ : $F(x) = \dfrac{x - \arctan(x)}{\pi}$




Es zeigt sich bei beiden Stammfunktionen, dass sie **an den Stellen $-\infty$ und $\infty$ nicht definiert** sind , was man anhand von GTR-Grafiken nicht auf Anhieb sieht !!