

Das Programm untersucht die **Inzidenz** zweier Geraden $g: \overrightarrow{OX} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$ und $h: \overrightarrow{OX} = \vec{b} + \mu \vec{v}$.
Es ermittelt ferner den **Abstand** d sowie alle dazu nötigen Zwischenergebnisse.
Alle Ergebnisse werden sowohl in Bruchform als auch in Dezimalschreibweise angegeben.
Es sind sowohl 3-dimensionale als auch 2-dimensionale Probleme (z-Komponente = 0 !) lösbar.
Der Sonderfall **Punkt-Gerade** kann bei der Abstandsbestimmung gleichfalls untersucht werden.

Vor dem Programmstart müssen die 4 Listen L1 bis L4 mit den Komponenten der Vektoren $\vec{a}, \vec{u}, \vec{b}, \vec{v}$ (Reihenfolge beachten !) belegt werden.

Während der Programmabarbeitung werden noch die Listen L5 (für $\vec{b} - \vec{a}$) und L6 (für temporäre Berechnungen von Vektoren) belegt.
Außerdem werden Matrizen A,B,C,D,E,F,G verwendet.

Ferner wird ein „Fallunterscheider“ P verwendet mit folgenden Belegungsmöglichkeiten:

P=1 g,h sind parallel und nicht gleich

P=2 g,h sind gleich

P=3 g,h sind windschief

P=4 g,h schneiden sich im Punkt S

Programmablauf:

1) Im Programm erfolgt zunächst die Parallelitätsprüfung (Gibt es ein k mit $\vec{u} = k\vec{v}$?).

Dies führt zum vektoriellen Ansatz $\begin{pmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot v1 \\ k \cdot v2 \\ k \cdot v3 \end{pmatrix}$ und somit $k = u1/v1 = u2/v2 = u3/v3$.

Aus Gründen der Rechengenauigkeit wird äquivalent umgeformt: $u1 \cdot v2 = u2 \cdot v1$ und $u1 \cdot v3 = u3 \cdot v1$.
Sind diese Bedingungen erfüllt, dann sind die Geraden parallel. Im Programm ist dann P=1, sonst 3.

Ist P=1, so wird auf Gleichheit geprüft. $\vec{b} - \vec{a} = k\vec{v}$? . Ähnliche Vorgehensweise wie bei 1).

2) Ist P weder 1 noch 2, so wird jetzt auf Windschiefheit oder Schnittpunkt geprüft.

Hierzu ist das LGS $\vec{a} + \lambda \vec{u} = \vec{b} + \mu \vec{v}$ zu lösen . Bei eindeutiger Lösung existiert ein Schnittpunkt, bei einem Widerspruch sind g und h windschief. S wird ggfs. berechnet .

3) Die jeweilige Lösung wird am Bildschirm ausgegeben. Für S wird ggfs. sein Ortsvektor ausgegeben.

4) Nun werden die jeweiligen Abstände berechnet und ausgegeben.

Bei Gleichheit von g und h (Fall P=2) sowie bei Existenz eines Schnittpunktes S (Fall P=4) ist natürlich nichts zu rechnen, denn der Abstand ist $d=0$!

Relativ aufwändig sind jedoch die Rechnungen zu den Fällen P=1 und P=3 .

5) Abstand d bei Parallelität:

Hierbei wird die Orthogonalität verwendet. Man fällt das Lot vom „Stützpunkt“ A der Gerade g auf die Gerade h mittels des Skalarproduktansatzes $(\vec{b} - \vec{a} + \mu \vec{v}) * \vec{v} = 0$.

Man erhält dann das zum Lotfußpunkt F auf h gehörende μ , womit sich F berechnen lässt.

Der Abstand d ist dann der Betrag des Vektors \overrightarrow{AF} . (Abstand Punkt-Gerade !)

6) Abstand d bei Windschiefheit:

Hierbei werden zwei (Lotfuß-)Punkte P auf g und Q auf h gesucht durch die Ansätze:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + \lambda \vec{u} \quad \overrightarrow{OQ} = \vec{b} + \mu \vec{v} \quad \overrightarrow{PQ} * \vec{u} = 0 \quad \text{sowie} \quad \overrightarrow{PQ} * \vec{v} = 0$$

Das aus den beiden Orthogonalitätsbedingungen resultierende LGS lautet wie folgt:

$$\lambda \vec{u}^2 - \mu \vec{u} * \vec{v} = (\vec{b} - \vec{a}) * \vec{u} \quad \wedge \quad \lambda \vec{u} * \vec{v} - \mu \vec{v}^2 = (\vec{b} - \vec{a}) * \vec{v}$$

Mit dem TI83 lassen sich die Skalarprodukte (Koeffizienten von λ, μ) so berechnen:

$$\vec{u} * \vec{v} = \text{sum}(\text{L2L4})$$

$$\vec{u}^2 = \text{sum}(\text{L2}^2)$$

$$\vec{v}^2 = \text{sum}(\text{L4}^2)$$

$$(\vec{b} - \vec{a}) * \vec{u} = \text{sum}(\text{L5L2})$$

$$(\vec{b} - \vec{a}) * \vec{v} = \text{sum}(\text{L5L4})$$

Anschließend werden die entsprechenden Koeffizienten von λ, μ in eine Matrix [A] geschrieben (beispielsweise: $-\text{sum}(\text{L4}^2)$ STO [A](2,2)) und mittels $\text{rref}([A])$ gelöst.

Mithilfe der Parameter λ, μ lassen sich die Punkte P, Q berechnen und somit auch $d = |\overrightarrow{PQ}|$.

Beispiele:

1)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

L1	L2	L3	1
3 -1 5	2 -3 -1	0 5 -3	
-----	-----	-----	
L1 = {3, -1, 5}			

L2	L3	L4	4
2 -3 -1	0 5 -3	-4 6 2	
-----	-----	-----	
L4 = {-4, 6, 2}			

INZIDENZ VON G,H
DIE VEKTOREN
A,U,B,V MUESSEN
IN L1 BIS L4
VORLIEGEN !!
[ENTER]

G,H PARALLEL
[ENTER]

LAMBDA=
-4/7

LOTFUSSP.: OF=
[[16/7]
[[11/7]
[[-29/7]]
[[2.285714286]
[[1.571428571]
[[-4.142857143]]

VEKTOR AF=
[[[-5/7]
[[18/7]
[[-64/7]]
[[[-.7142857143]
[[2.571428571]
[[-9.142857143]]

[[2.571428571]
[[-9.142857143]]
QUAD. ABST. D²=
635/7
ABSTAND D=
9.524404743
Done

2)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 19 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

G,H WINDSCHIEF
[ENTER]

LAMBDA=
MUE=
1/2
-1

LOTFUSSP.: OP=
[[[2]
[[3]
[[6]]
[[[2]
[[3]
[[6]]

LOTFUSSP.: OQ=
[[[-9]
[[13]
[[[-1]]
[[[-9]
[[13]
[[[-1]]

VERB.VEKTOR PQ=
[[[-1]]
[[10]
[[[-7]
[[[-1]]
[[10]
[[[-7]]

[[10]
[[-7]]
QUAD. ABST. D²=
270
ABSTAND D=
16.43167673
Done

3)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ORTSVEKTOR OS=
[[[2]
[[1]
[[[-3]]
[[[2]
[[1]
[[[-3]]

ABSTAND=0
Done

4)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

G=H

ABSTAND=0
Done

5)

A(3/0/7)

Achtung: Hier sollte

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gewählt werden !

G, H PARALLEL

LAMBDA= -11/28

LOTFUSSP.: OF=

```

[[11/7 ]
 [37/14 ]
 [-53/14]]
[[1.571428571 ]
 [2.642857143 ]
 [-3.785714286]]

```

VEKTOR AF=

```

[[ -10/7 ]
 [37/14 ]
 [-151/14]]
[[ -1.428571429 ]
 [2.642857143 ]
 [-10.78571429]]

```

[2.642857143]
[-10.78571429]]
QUAD. ABST. D²=
1755/14
ABSTAND D=
11.19630041
Done

6)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

z-Komp = 0 !!

	L2	L3	1
5	-2	8	
5	-4	-1	
0	0	0	
-----	-----	-----	
L1 = (5, 5, 0)			

G, H PARALLEL

LAMBDA= 9/5

LOTFUSSP.: OF=

```

[[49/5 ]
 [13/5 ]
 [0 ]]
[[9.8 ]
 [2.6 ]
 [0 ]]

```

VEKTOR AF=

```

[[24/5 ]
 [-12/5 ]
 [0 ]]
[[4.8 ]
 [-2.4 ]
 [0 ]]

```

[-2.4]
[0]]
QUAD. ABST. D²=
144/5
ABSTAND D=
5.366563146
Done