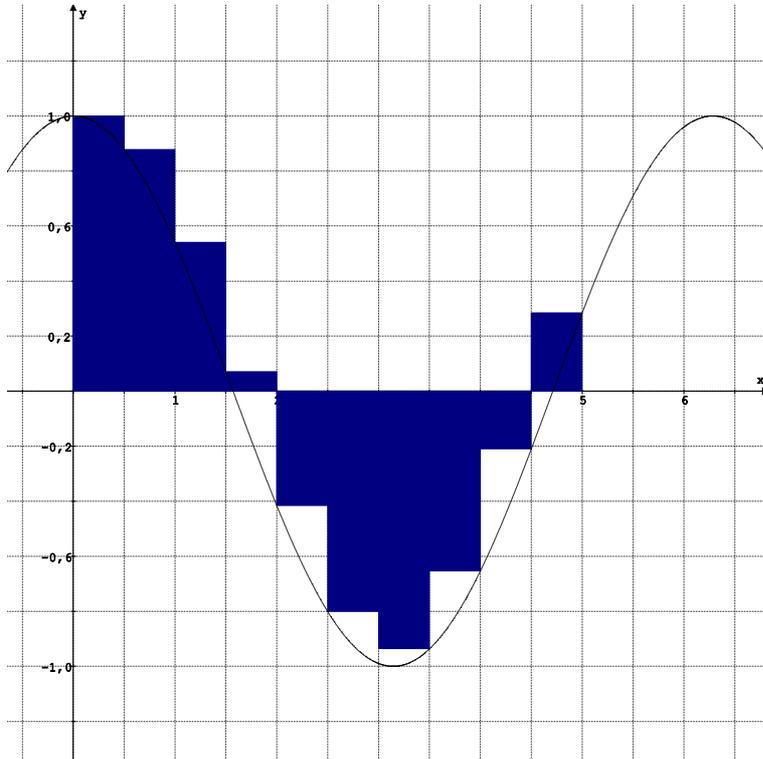


## Ober- und Untersummen bei nicht monotonen Funktionen

Def: Ist eine Funktion in  $[a;b]$  sowohl steigend als auch fallend, so gilt für die Obersumme  $O_n$  (Untersumme  $U_n$ ) folgendes: Für jedes Teilintervall der Breite  $(b-a)/n$  wählt man als Funktionswert das jeweilige Maximum (Minimum) von  $f$  in diesem Teilintervall.



Beispiel:

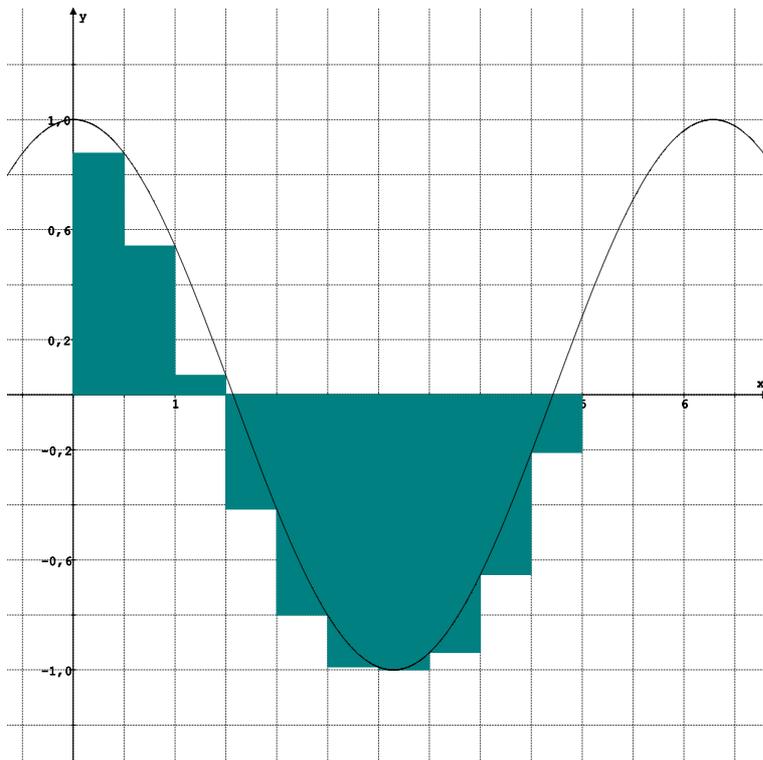
$$f(x) = \cos(x) \text{ in } [0 ; 5]$$

$$\int_0^5 \cos(x) dx \approx -0,9589$$

Die eingezeichnete Obersumme orientiert sich je Teilintervall auf das jeweilige Maximum von  $f$  !!

TPlot 3.0 berechnet hier:

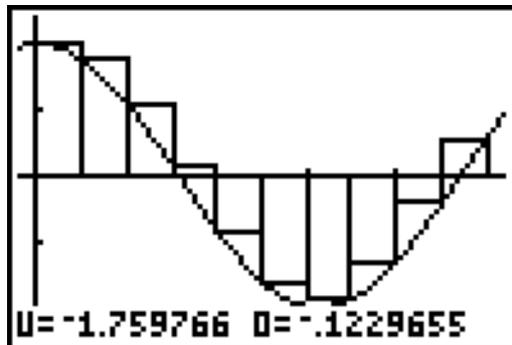
$$\begin{aligned} O_{10} &\approx -0,123 \\ O_{20} &\approx -0,545 \\ O_{50} &\approx -0,794 \\ O_{100} &\approx -0,877 \\ O_{200} &\approx -0,918 \\ O_{500} &\approx -0,943 \\ O_{1000} &\approx -0,951 \end{aligned}$$



Zum Vergleich die  
Untersumme: TPlot 3.0  
berechnet  $U_{10} \approx -1,760$   
 $U_{1000} \approx -0,967$

**Beim TI83 sieht das folgendermaßen aus**

Beispiel:  $U_{10}$  und  $O_{10}$  für  $\cos(x)$  in  $[0;5]$



(die Rechtecke stellen hier lediglich die Obersumme dar !)

Das Programm für den TI83 berechnet mit  $fmax()$  bzw.  $fmin()$  für jedes Teilintervall zunächst das Maximum und das Minimum, womit die jeweilige Höhe des Rechtecks bestimmt wird: Dies kostet übrigens immens viel Rechenzeit !

Das TI83-BASIC-Programm (verkürzt) für beliebige Ober- und Untersummen:

<pre> ClrHome Prompt A,B,N Disp „WELCHE GRAFIK ?“ Disp “USUM=1“ Disp “OSUM=2” Disp “BEIDE=3” Input E (B-A)/N→D Ø→U: Ø→O ClrDraw:DispGraph         </pre>	<pre> For(I, Ø,N-1) A+I*D→L:L+D→M Y1(fMin(Y1,X,L,M))→V Y1(fMax(Y1,X,L,M))→W If N≤30 :Then; (Grafik !) If E=1 or E=3 Then ; (USUM zeichnen !) Line(L, Ø,L,V) Line(L, V,M,V) Line(M,V,M, Ø) End         </pre>	<pre> If E=2 or E=3 Then ; (OSUM zeichnen !) Line(L, Ø,L,W) Line(L, W,M,W) Line(M,W,M, Ø) End End U+V→U O+W→O End; ( von For ) U*D→U O*D→O Text(57,0,“U=“,U) Text(57,0,“O=“,O)         </pre>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Ein komfortableres Programm (bessere Eingabemöglichkeiten) liegt unter dem Namen UOSUMGRF vor !