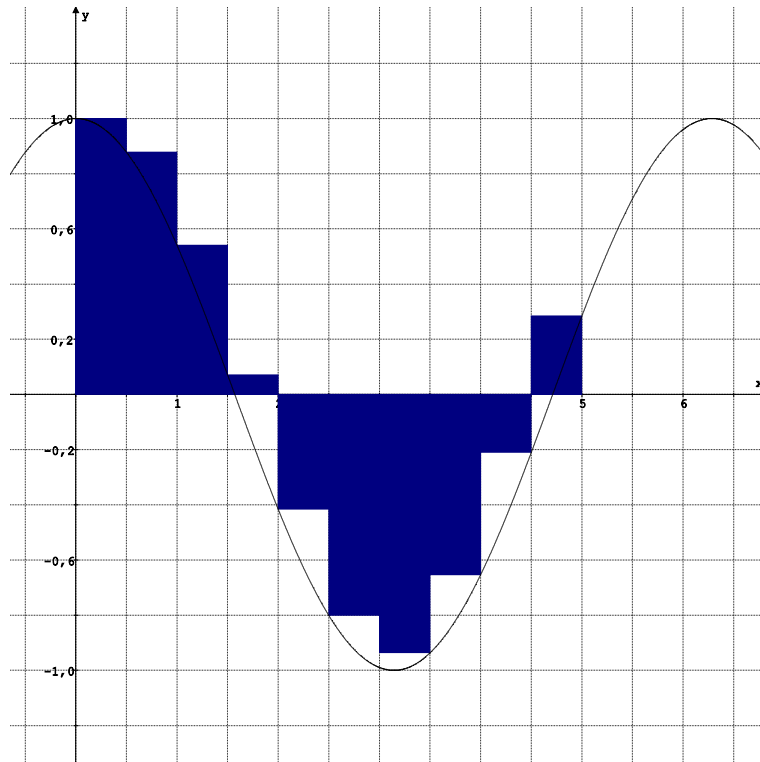


Ober- und Untersummen bei nicht monotonen Funktionen

Def: Ist eine Funktion in $[a;b]$ sowohl steigend als auch fallend, so gilt für die Obersumme O_n (Untersumme U_n) folgendes: Für jedes Teilintervall der Breite $(b-a)/n$ wählt man als Funktionswert das jeweilige Maximum (Minimum) von f in diesem Teilintervall.



Beispiel:

$$f(x) = \cos(x) \text{ in } [0 ; 5]$$

$$\int_0^5 \cos(x) dx \approx -0,9589$$

Die eingezeichnete Obersumme orientiert sich je Teilintervall auf das jeweilige Maximum von f !!

TPlot 3.0 berechnet hier:

$$O_{10} \approx -0,123$$

$$O_{20} \approx -0,545$$

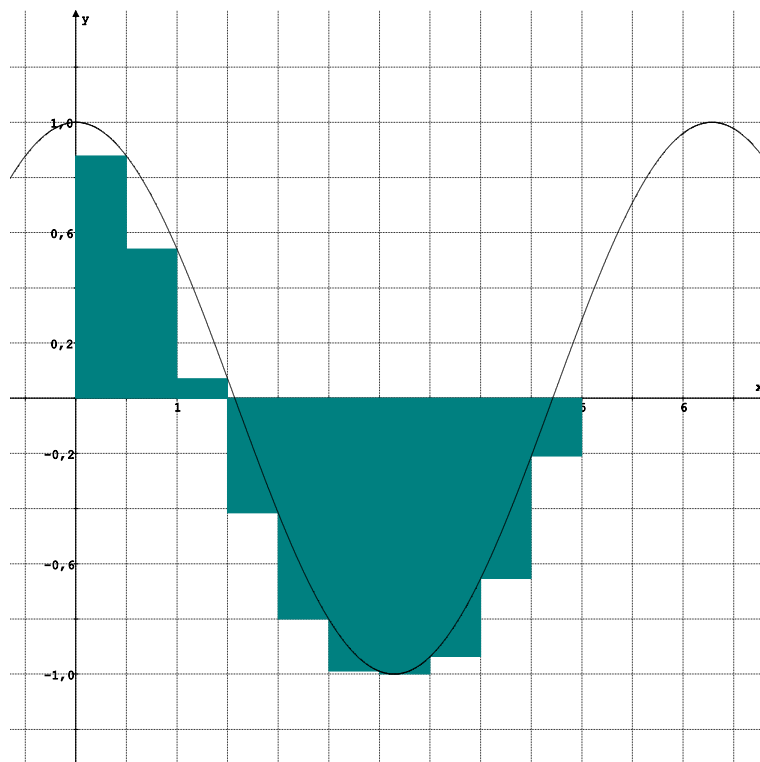
$$O_{50} \approx -0,794$$

$$O_{100} \approx -0,877$$

$$O_{200} \approx -0,918$$

$$O_{500} \approx -0,943$$

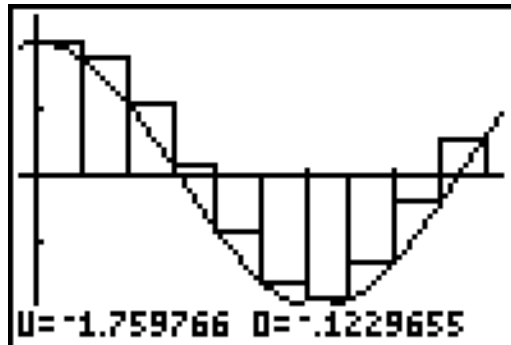
$$O_{1000} \approx -0,951$$



Zum Vergleich die
Untersumme: TPlot 3.0
berechnet $U_{10} \approx -1,760$
 $U_{1000} \approx -0,967$

Beim TI83 sieht das folgendermaßen aus

Beispiel: U_{10} und O_{10} für $\cos(x)$ in $[0;5]$



(die Rechtecke stellen hier lediglich die Obersumme dar !)

Das Programm für den TI83 berechnet mit $\text{fmax}()$ bzw. $\text{fmin}()$ für jedes Teilintervall zunächst das Maximum und das Minimum, womit die jeweilige Höhe des Rechtecks bestimmt wird: Dies kostet übrigens immens viel Rechenzeit !

Das TI83-BASIC-Programm (verkürzt) für beliebige Ober- und Untersummen:

| | | |
|--|--|---|
| ClrHome Prompt A,B,N Disp „WELCHE GRAFIK ?“ Disp “USUM=1” Disp “OSUM=2” Disp “BEIDE=3” Input E $(B-A)/N \rightarrow D$ $\emptyset \rightarrow U: \emptyset \rightarrow O$ ClrDraw:DispGraph | For(I, \emptyset ,N-1) $A+I*D \rightarrow L: L+D \rightarrow M$ $Y_1(\text{fMin}(Y_1,X,L,M)) \rightarrow V$ $Y_1(\text{fMax}(Y_1,X,L,M)) \rightarrow W$ If $N \leq 30$:Then; (Grafik !) If E=1 or E=3 Then ; (USUM zeichnen !) Line(L, \emptyset ,L,V) Line(L, V,M,V) Line(M,V,M, \emptyset) End | If E=2 or E=3 Then ; (OSUM zeichnen !) Line(L, \emptyset ,L,W) Line(L, W,M,W) Line(M,W,M, \emptyset) End End $U+V \rightarrow U$ $O+W \rightarrow O$ End; (von For) $U*D \rightarrow U$ $O*D \rightarrow O$ Text(57,0,“U=“,U) Text(57,0,“O=“,O) |
|--|--|---|

Ein komfortableres Programm (bessere Eingabemöglichkeiten) liegt unter dem Namen UOSUMGRF vor !