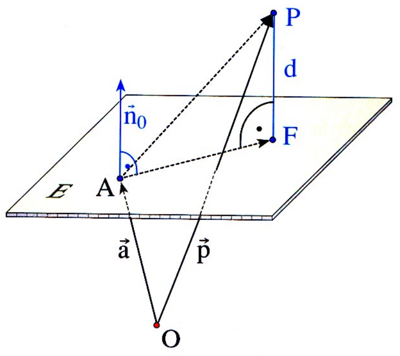
Algorithmen zur Abstandsbestimmung Ac

1) Abstand Punkt P - Ebene IE :



Gegeben sind:

Ebenenpunkt A, Bezugspunkt P und Normalenvektor $\vec{n}$.
Statt des Normalenvektors können aber auch 2 Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Ebene gegeben sein.
Dann muss der Normalenvektor erst bestimmt werden ,z.B. mittels $\vec{u} \times \vec{v}$!

n_o ist ein auf die Länge 1 gekürzter Normalenvektor .

Es gilt die Formel: $\mathbf{d} = \left| \vec{n}_o * (\vec{p} - \vec{a}) \right|$ mit $\boxed{\vec{n}_o = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}}$

Beweis: $\frac{\vec{n} * \overrightarrow{AP}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{n} * (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FP})}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{n} * \overrightarrow{AF} + \vec{n} * \overrightarrow{FP}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{n} * \overrightarrow{FP}}{|\vec{n}|} = \frac{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{FP}| \cdot \cos(0°)}{|\vec{n}|} = |\overrightarrow{FP}| = d$

Der Term $\vec{n}_o * (\vec{p} - \vec{a})$ kann auch negativ sein ! (dies ist der Fall, wenn der Winkel APF > 90° ist) .
Da Abstände immer positiv sind, verwendet man für d den Betrag von $\vec{n}_o * (\vec{p} - \vec{a})$

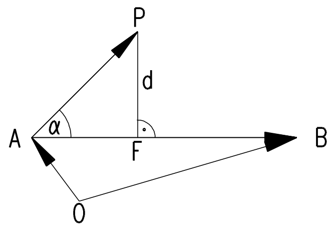
2) Abstand Punkt P - Gerade g im Raum (R^3) :

Gegeben sind $\overrightarrow{OP}$ und die Geradengleichung $\overrightarrow{OX} = \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$

1. Methode:

Man verwendet den Winkel α (s. Zeichnung). Ein Punkt A von g ist auf jeden Fall bekannt. Sollte B nicht bekannt sein, so kann $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ verwendet werden.

Es gelten: $\sin(\alpha) = \frac{d}{|\overrightarrow{AP}|}$ und $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AP}|}$. Mittels des cos wird α bestimmt und dann d anhand der Sinusbeziehung berechnet .



2. Methode:

Man bestimmt eine Hilfsebene, die P enthält und senkrecht auf g steht (somit als Normalenvektor den Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden hat). Schneidet man diese Ebene mit g, so erhält man den Lotfußpunkt F.

Dann gilt : $\mathbf{d} = |\overrightarrow{FP}|$

3. Methode:

Bestimme den Lotfußpunkt F durch : $\overrightarrow{OF} = \vec{a} + \frac{\vec{u} * (\vec{p} - \vec{a})}{\vec{u}^2} \cdot \vec{u}$ mit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

Dann ist der Abstand d = $|\vec{p} - \overrightarrow{OF}|$

3) Abstand zweier windschiefen Geraden g und h :

Gegeben seien g: $\overrightarrow{OX} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$ und h: $\overrightarrow{OX} = \vec{b} + \mu \vec{v}$

Hier benötigt man zunächst einen Normalenvektor $\vec{n}$, der sowohl auf g als auch auf h senkrecht steht. Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die Richtungsvektoren der beiden Geraden, so gilt: $\vec{u} * \vec{n} = 0$ und $\vec{v} * \vec{n} = 0$. Aus dem daraus sich ergebenden LGS bestimmt man einen Normalenvektor. (Alternativ: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$)
Mit den beiden Stützvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ der Geraden berechnet man den Abstand mit der Formel

$$\mathbf{d} = \left| \; \vec{n}_o * (\vec{b} - \vec{a}) \right|$$

Die beiden Lotfußpunkte P und Q berechnet man mittels $\overrightarrow{OP} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$ und $\overrightarrow{OQ} = \vec{b} + \mu \vec{v}$ (*)

Für die Parameter λ, μ gelten $\lambda \, \vec{u}^2 - \mu \, \vec{u} * \vec{v} = (\vec{b} - \vec{a}) * \vec{u} \quad \wedge \quad \lambda \, \vec{u} * \vec{v} - \mu \, \vec{v}^2 = (\vec{b} - \vec{a}) * \vec{v}$

λ und μ sind die Lösungen des o.a. LGS, welche man in die obigen Gleichungen (*) einsetzt .

**4) Das Problem „Abstand paralleler Geraden“ lässt sich auf „Punkt-Gerade“ zurückführen !
Die Probleme „Abstand Gerade-Ebene“ und „Abstand Ebene-Ebene“ lassen sich auf „Punkt-Ebene“ zurückführen !**