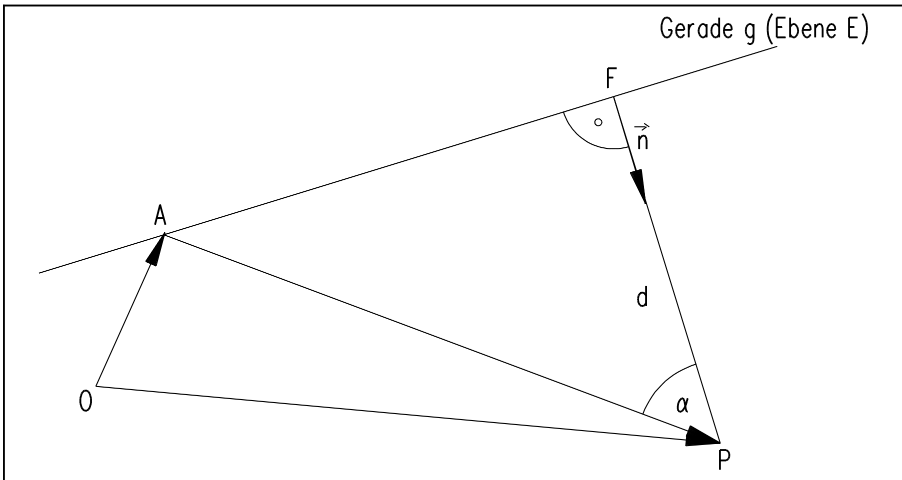
ABSTANDSBESTIMMUNGEN

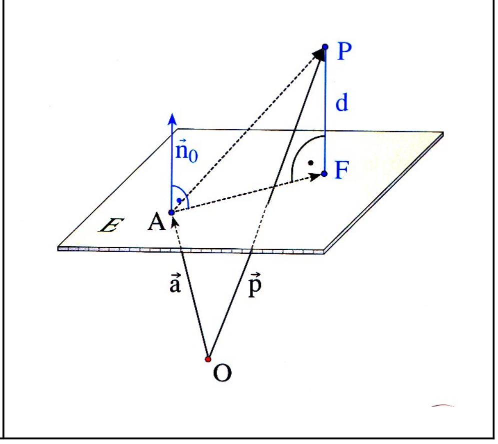
A) Vektorrechnungsmethoden (mit Skalarprodukt):

1) Abstand eines Punktes P von einer Ebene IE im Raum (einer Gerade g in der Ebene):

Anmerkung: für **Geraden im Raum** funktioniert diese Vektormethode **nicht** !
Hier müssen zusätzliche Bedingungen verwendet werden.



Alternatives Bild:



Wie man sieht, müssen folgende Größen gegeben sein:

Geradenpunkt (Ebenenpunkt) A, Ausgangspunkt P und Normalenvektor $\vec{n}$.
Statt des Normalenvektors kann aber auch der Richtungsvektor $\vec{u}$ (bei Geraden) oder 2 Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ (bei Ebenen) gegeben sein. In diesen Fällen muss der Normalenvektor aus diesen Größen erst bestimmt werden, was bekanntlich bei Ebenen wesentlich aufwändiger ist als bei Geraden !

Eine Formel zur Berechnung des Abstandes d ergibt sich mithilfe des cos(α) wie folgt:

Einerseits gilt $\cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{d}{|\overrightarrow{AP}|} = \frac{d}{|\vec{p} - \vec{a}|}$,

andererseits wegen der Skalarproduktdefinition: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}*(\vec{p}-\vec{a})}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}-\vec{a}|}$.

Durch Vergleich folgt: $d = \frac{\vec{n}*(\vec{p}-\vec{a})}{|\vec{n}|}$

Alternative Herleitung:

$$\frac{\vec{n}*\overrightarrow{AP}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{n}*(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FP})}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{n}*\overrightarrow{AF} + \vec{n}*\overrightarrow{FP}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{n}*\overrightarrow{FP}}{|\vec{n}|} = \frac{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{FP}|\cdot\cos(\phi)}{|\vec{n}|} = |\overrightarrow{FP}| = d$$

Achtung: d kann auch negativ sein ! (dies ist der Fall, wenn $\alpha > 90°$ ist) .

Da Abstände immer positiv sind, verwendet man den Betrag: $\boxed{d = \left|\frac{\vec{n}*(\vec{p}-\vec{a})}{|\vec{n}|}\right|}$

Beispiele:

① Geraden in der x-y-Ebene (2D):

a) Gegeben g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und P(0/0) .

Ermittle d approximativ (mit 2D-Zeichnung) und exakt mit der Formel.

Lösung mit Formel: Bestimme $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_o = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Also ist $d = \left| \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right| = \left| \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot (3 \cdot (-4) + 4 \cdot 0) \;. \right| = 2{,}4$

Der Abstand beträgt also d = 2,4 LE .

b) Gegeben g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und P(7/9) . Lösung:

c) Gegeben g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 12 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 21 \\ 20 \end{pmatrix}$ und P(9/-9) . Lösung:

d) Gegeben g: 3x + 4y = 7 und P(6/11) . Lösung:

e) Gegeben g: $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} * \vec{x} = 2$ und P(1/3) . Lösung:

f) Berechne den Flächeninhalt von ABC mit A(1/2) B(8/-1) C(6/5) . Lösung:

② Ebenen im Raum (3D):

a) Gegeben IE: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ und P(3/2/1) .

Eine Zeichnung ist für Parameterformen in der Regel nicht sinnvoll !

Zuerst wird ein Normalenvektor bestimmt. Es ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_o = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Also ist $d = \left| \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right| = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$.

Der Abstand beträgt also d = 4 LE .

b) Gegeben IE: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und P(7/3/4) . Lösung:

c) Gegeben IE: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ und P(2/0/2) .Lösung: d = 3

Für P(2/1/-8) folgt in c) die Lösung d = 4

Für P(5/5/5) folgt in c) die Lösung d = 16/3

③ Warum funktioniert die Lösungsformel nicht für eine Gerade im Raum ??

Antwort: Bei einer Geraden im Raum gibt es unendlich viele Normalenvektoren, die alle um den Richtungsvektor der Geraden g drehen. Daher müssen weitere Bedingungen gefunden werden, um das Problem zu lösen. Man benötigt noch die Ebene, in der P liegt und die senkrecht zu g verläuft !
(siehe weiter unten)

2) Abstand eines Punktes P von einer Geraden g im IR^3 :

1. Methode:

Man bestimmt eine Hilfsebene IE, die senkrecht auf g steht und somit als Normalenvektor den Richtungsvektor der Geraden hat. Schneidet man diese Ebene mit g, so erhält man den Lotfußpunkt F.

Dann gilt : $\mathbf{d} = |\ \overrightarrow{FP}\ |$

Bestimmung von F: Gegeben seien $\vec{p}$ und $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$

Erst Hilfsebene IE bestimmen: $\vec{u} * (\vec{x} - \vec{p}) = 0$

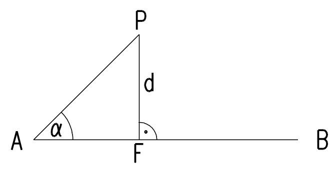
Dann IE $\cap$ g: $\vec{u} * (\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{p}) = 0$

Auflösung nach $\lambda = \frac{\vec{u} * (\vec{p} - \vec{a})}{u^2}$

Der Lotfußpunkt F ergibt sich durch: $\boxed{\vec{x}_F = \vec{a} + \frac{\vec{u} * (\vec{p} - \vec{a})}{u^2} \cdot \vec{u}}$ Es folgt $\boxed{d = |\ \vec{x}_F - \vec{p}\ |}$

2. Methode:

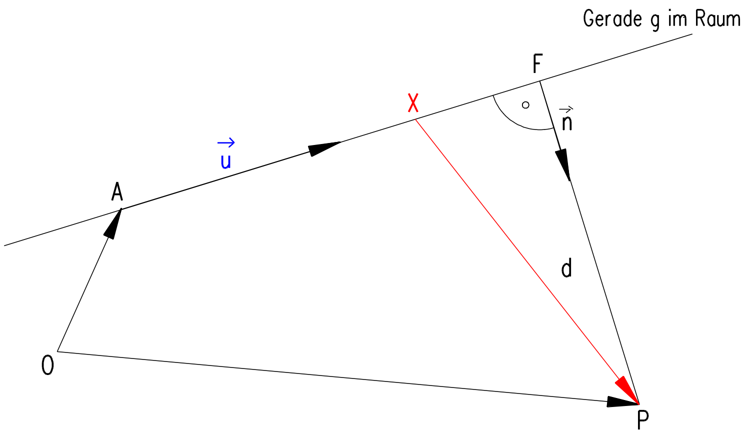
Man kennt 2 Punkte A und B der Geraden g im R^3 oder man bestimmt diese anhand der Geradengleichung . Dann lässt sich der Winkel α mit dem Skalarprodukt $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AP}$ bestimmen. Außerdem gilt: $\sin(\alpha) = \frac{d}{|\ \overrightarrow{AP}\ |}$.



Da α nun bekannt ist lässt sich auch d bestimmen .

3. Methode

Gegeben sind $\overrightarrow{OP}$ und die Geradengleichung $\overrightarrow{OX} = \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$. Gesucht ist ein Punkt X auf g, so dass XP senkrecht auf g steht .



$$\overrightarrow{XP} * \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (\ \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}\ ) * \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (\ \overrightarrow{OP} - (\ \vec{a} + \lambda\vec{u}\ )\ ) * \vec{u} = 0 \Leftrightarrow$$
$$(\ \overrightarrow{OP} - \vec{a} - \lambda\vec{u}\ ) * \vec{u} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\ \overrightarrow{OP} - \vec{a}) * \vec{u} - \lambda\vec{u} * \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (\ \overrightarrow{OP} - \vec{a}) * \vec{u} = \lambda\vec{u} * \vec{u} \Leftrightarrow \frac{(\ \overrightarrow{OP} - \vec{a}) * \vec{u}}{\vec{u} * \vec{u}} = \lambda$$

Hat man λ bestimmt, so lässt sich F bestimmen und somit auch d = |FP| .

3) Abstand Gerade g – Gerade h

a) Geraden g und h parallel :

Hier kann man den Abstand eines Punktes von h zur Geraden g berechnen (siehe 2)).
Als Punkt nimmt man zweckmäßigerweise den Stützpunkt Q von h .

b) Geraden g und h windschief :

Hier benötigt man zunächst einen Normalenvektor $\vec{n}$, der sowohl auf g als auch auf h senkrecht steht. Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die Richtungsvektoren der beiden Geraden, so gilt: $\vec{u} * \vec{n} = 0$ und $\vec{v} * \vec{n} = 0$. Aus dem daraus sich ergebenden LGS bestimmt man einen Normalenvektor.
Sind $\vec{p}$ und $\vec{q}$ die beiden Stützvektoren der Geraden, so berechnet man den Abstand mit der Formel

$$\boxed{d = \left| \frac{\vec{n} * (\vec{p} - \vec{q})}{|\vec{n}|} \right|}$$

Hinweis: Der Normalenvektor kann auch mit dem Vektorprodukt bestimmt werden ! ($\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$)

4) Abstand Gerade g – Ebene IE bzw. Ebene IE_1 - Ebene IE_2

Diese Fälle lassen sich immer auf das Problem Punkt – Ebene zurückführen !

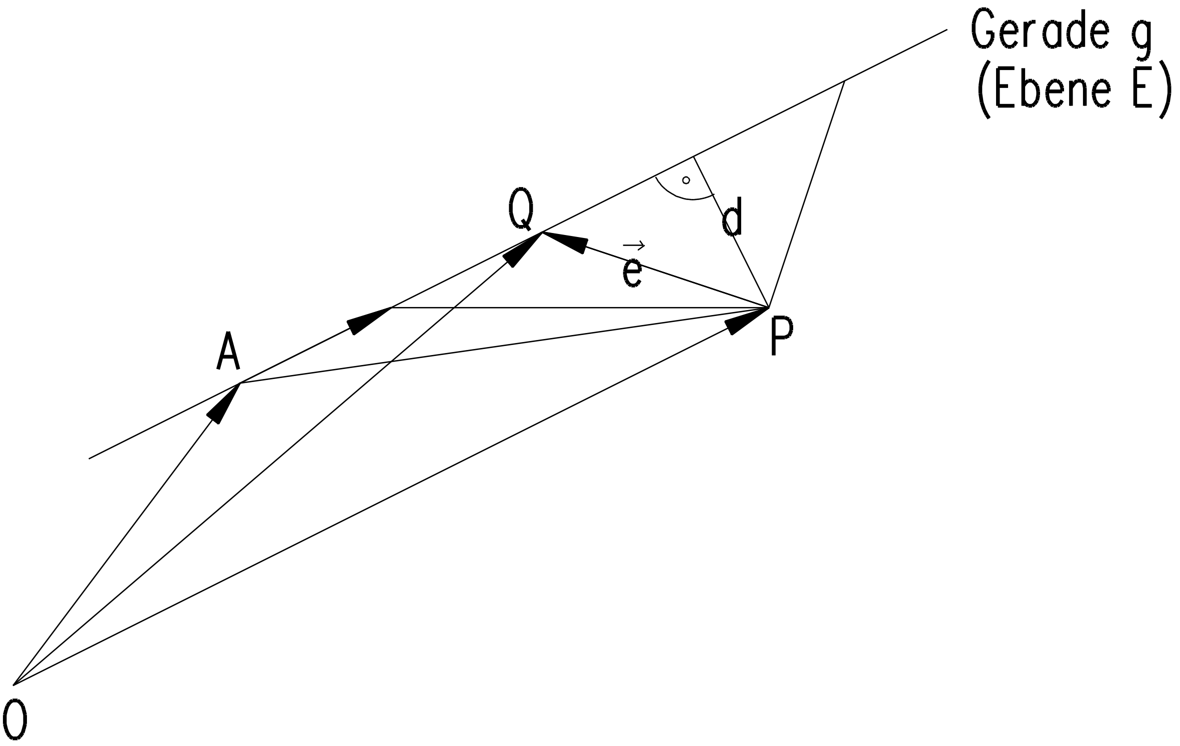
B) Analysismethode:

1) Abstand eines Punktes P von einer Geraden g im R^2 oder R^3 (einer Ebene IE im R^3):

Anmerkung: für **Geraden im Raum** funktioniert auch diese Analysismethode !
Für Ebenen im Raum ist die Methode kompliziert !!

Der Abstand wird hier bestimmt mit Extremwertmethoden der Analysis:

Zuerst wird die Entfernung e zwischen P und einem Punkt Q gebildet, welcher auf g „wandern" soll.



Zunächst erkennt man, dass $\vec{e} = \vec{q} - \vec{p}$ gilt, d.h.

Gerade in der Ebene: $\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$ Gerade im Raum: $\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$

Nach Pythagoras gilt dann

$e^2 = (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2$ für den 2-dimensionalen Fall sowie

$e^2 = (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q - z_p)^2$ für den 3-dimensionalen Fall .

Aus der Vektorgleichung der Geraden g erhält man x_q und y_q (und z_q), denn Q wandert ja auf der Geraden g und muss somit auch die Vektorgleichung erfüllen.
Diese Koordinaten sowie diejenigen des gegebenen Punktes P werden in den Term für e^2 eingesetzt . Man erhält somit eine Funktion f , welche das Entfernungsquadrat e^2 in Abhängigkeit des Parameters r der Geradengleichung ausdrückt, also f(r) .

Bildet man nun die 1. Ableitung f '(r) und setzt diese Null, so erhält man über eine Bestimmungsgleichung dasjenige r_{min}, mit dem man das rel. Minimum der Entfernung (den Abstand) ermitteln kann.

Das rel. Min. ist dann $d = e_{min} = \sqrt{f(r_{min})}$

① **Rechnung für eine Gerade in der Ebene:** g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und P(7/9) .

Es gilt : $\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, woraus $x_q = 9 - 4r$ und $y_q = -5+3r$ folgt .

Es folgt dann $e^2 = f(r) = (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 = (2-4r)^2 + (-14+3r)^2 =$
$4 - 16r + 16r^2 + 196 - 84r + 9r^2 = 200 - 100r + 25r^2$.

Also ist $f'(r) = 50r - 100$. Aus $f' = 0$ folgt $r = 2$.

Deshalb ergibt sich für die gesuchte minimale Entfernung

$d = e_{min} = \sqrt{f(2)} = \sqrt{200-200+100} = \sqrt{100} = 10$

② **Rechnung für eine Gerade im Raum:** g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und P(2/-3/5)

Es gilt: $\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, woraus folgt: $x_q = 2+3r$ $y_q = 2+r$ $z_q = 4-r$

Es folgt dann $e^2 = f(r) = (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q - z_p)^2 = (3r)^2 + (5+r)^2 + (-1-r)^2 =$
$9r^2 + 25 + 10r + r^2 + 1 + 2r + r^2 = 11r^2 + 12r + 26$.

Also ist $f'(r) = 22r + 12$. Aus $f'(r) = 0$ folgt $r = -6/11$.

Deshalb ergibt sich für die gesuchte minimale Entfernung
$d = e_{min} = \sqrt{f(-\frac{6}{11})} = \sqrt{11 \cdot \frac{36}{121} - 12 \cdot \frac{6}{11} + 26} = \sqrt{\frac{36}{11} - \frac{72}{11} + \frac{286}{11}} = \sqrt{\frac{250}{11}} \approx 4{,}767$

Weitere Aufgaben für Geraden im Raum:

1) <u>Berechne den Abstand:</u>

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und P(6/7/-3)

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und P(9/11/6)

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und P(9/4/9)

2) <u>Berechne den Flächeninhalt von ABC:</u>

a) A(1/1/1), B(7/4/7), C(5/6/-1)

a) A(2/1/0), B(1/1/0), C(5/1/1)

3) <u>Begründe die Parallelität von g und h und berechne den Abstand g-h:</u>

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

2) Abstand eines Punktes P von einer Ebene IE mit Analysismethoden :

Die Zeichnung für Geraden muss noch um einen 2. Spannvektor erweitert werden, was hier nicht ausgeführt werden soll .
Der Punkt Q muss jetzt auf der Ebene „wandern“, d.h. es müssen dann 2 Parameter, nämlich r und t , variiert werden.
Man muss nun partielle Ableitungen bilden, nämlich df/dr sowie df/dt und diese jeweils 0 setzen (Gradientenverfahren). Es ergibt sich ein LGS zur Bestimmung der r_{min}, t_{min}.

Das rel. Min. ist hier $e_{min} = \sqrt{f(r_{min}, t_{min})}$

Rechnung für ② mit IE: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ und P(3/2/1) .

Achtung: Die Rechnung ist sehr aufwändig (Gradientenverfahren beim Ableiten) und eignet sich daher allenfalls für den Leistungskurs, möglichst mit CAS-Rechner !

Es gelten $x_q = 1+2r-4t$ $y_q = -3+5t$ $z_q = 1-r-3t$
Dann folgt $f(r,t) = (-2+2r-4t)^2 + (-5+5t)^2 + (r+3t)^2 = 29 - 8r - 34t + 5r^2 + 50t^2 - 10rt$.

$df/dr = -8+10r-10t = 0$ und $df/dt = -34+100t-10r = 0$.
Lösung dieses LGS: $r = 19/15$ und $t = 7/15$.

Bildet man jetzt $f(19/15, 7/15)$, so erhält man das Ergebnis 16 .

Also ist der Abstand $d = e_{min} = 4$.

Anmerkung:

Erweiterung der Analysismethode (sowohl für Ebenen als auch für Geraden):
Das Minimum lässt sich approximativ auch über ein **Iterationsverfahren** bestimmen, bei dem man sukzessive den Parameter r verändert und den minimalen Wert aus der Tabelle abliest .